**9.8.** Вычислить разность потенциалов ионизации атомов водорода и тяжелого водорода.

**9.9.** Вычислить потенциал ионизации мезоатома водорода, находящегося в основном состоянии (масса $\mu^-$-мезона превышает массу электрона в 207 раз).

**9.10.** Оценить зависимость вероятности захвата ядром $\mu^-$-мезона, находящегося в основном состоянии мезоатома, от заряда ядра $Ze$ (захват обусловлен реакцией $\mu^- + p = n + \nu$).

**9.11.** Согласно классической механике при движении частицы с массой $\mu$ и зарядом $(-e)$ в кулоновском поле заряда $Ze$ сохраняется следующая векторная величина:

$$\mathbf{A} = -Ze^2\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{\mu}[\mathbf{p}\times\mathbf{L}],$$

которая называется вектором Рунге–Ленца. Построить квантово-механический оператор, соответствующий этой физической величине, и показать, что он коммутирует с гамильтонианом системы.

**9.12.** Определить плотность распределения координаты $z$ трехмерного изотропного гармонического осциллятора, находящегося в каждом из состояний $|nlm\rangle$ с $\Lambda = 1$.

**9.13.** Вычислить матричные элементы $\langle 2p, m|z|2s\rangle$. Что можно было бы сказать о результате на основании соображений о размерности?

# ЛЕКЦИЯ 10

## § 37. Квантование момента количества движения с помощью перестановочных соотношений

В § 32 мы нашли спектры и общие собственные функции операторов $\widehat{\mathbf{L}}^2$ и $\widehat{L}_z$. При этом использовались явные выражения для этих операторов в координатном представлении и решались соответствующие уравнения на собственные значения в пространстве $L_2$. Сейчас мы покажем, что эти же результаты можно получить, исходя только из коммутационных соотношений для операторов проекций момента на оси координат:

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_k] = i\hbar\sum_{l=1}^{3} e_{ikl}\widehat{L}_l. \tag{37.1}$$

Эти перестановочные соотношения легко получить (см. упражнение 1.7), воспользовавшись явным видом операторов. Однако вскоре мы увидим, что физическое содержание соотношений (37.1) значительно богаче тех непосредственных следствий, которые вытекают из явного вида операторов момента.

Введем безразмерные операторы момента:

$$\widehat{J}_i \equiv \frac{1}{\hbar}\widehat{L}_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3, \tag{37.2}$$

$$\widehat{\mathbf{J}}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \widehat{J}_i^2, \tag{37.3}$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\widehat{J}_i,\, \widehat{J}_k] = i\sum_{l=1}^{3} e_{ikl}\widehat{J}_l, \tag{37.4}$$

$$[\widehat{\mathbf{J}}^2,\, \widehat{J}_k] = 0. \tag{37.5}$$

С их помощью определим два новых неэрмитовых оператора:

$$\widehat{J}_+ \equiv 2^{-1/2}(\widehat{J}_x + i\widehat{J}_y), \tag{37.6}$$

$$\widehat{J}_- \equiv 2^{-1/2}(\widehat{J}_x - i\widehat{J}_y), \tag{37.7}$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\widehat{J}_\pm)^+ = \widehat{J}_\mp, \tag{37.8}$$

$$\widehat{J}_+\widehat{J}_- = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 + \widehat{J}_z), \tag{37.9}$$

$$\widehat{J}_-\widehat{J}_+ = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 - \widehat{J}_z), \tag{37.10}$$

$$[\widehat{\mathbf{J}}^2,\, \widehat{J}_\pm] = 0, \tag{37.11}$$

$$[\widehat{J}_z,\, \widehat{J}_\pm] = \pm\widehat{J}_\pm, \tag{37.12}$$

$$[\widehat{J}_+,\, \widehat{J}_-] = \widehat{J}_z. \tag{37.13}$$

Допустим, что мы нашли полный набор собственных функций коммутирующих операторов $\widehat{\mathbf{J}}^2$ и $\widehat{J}_z$. Обозначим его через $\{|J^2,\, m\rangle\}$. В представлении этих функций имеем

$$\langle J^2,\, m|\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2|J^2,\, m\rangle = J^2 - m^2. \tag{37.14}$$

С другой стороны,

$$\langle J^2, m|\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2|J^2, m\rangle = \langle J^2, m|\widehat{J}_x^2 + \widehat{J}_y^2|J^2, m\rangle \geqslant 0. \quad (37.15)$$

Следовательно,

$$J^2 - m^2 \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad m^2 \leqslant J^2. \quad (37.16)$$

Таким образом, при фиксированном значении $J^2$ величина $m$ ограничена сверху и снизу:

$$m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max}. \quad (37.17)$$

Теперь покажем, что $|J^2, m\rangle$ удовлетворяет соотношению

$$\widehat{J}_\pm|J^2, m\rangle = A|J^2, m \pm 1\rangle, \quad (37.18)$$

где $A$ — константа. Для этого подействуем оператором $[\widehat{J}_z, \widehat{J}_\pm]$ на функцию $|J^2, m\rangle$ и учтем (37.12):

$$(\widehat{J}_z\widehat{J}_\pm - \widehat{J}_\pm\widehat{J}_z)|J^2, m\rangle = \pm\widehat{J}_\pm|J^2, m\rangle. \quad (37.19)$$

Отсюда получаем

$$\widehat{J}_z(\widehat{J}_\pm|J^2, m\rangle) = (m \pm 1)(\widehat{J}_\pm|J^2, m\rangle), \quad (37.20)$$

т. е. $\widehat{J}_\pm|J^2, m\rangle$ есть собственная функция оператора $\widehat{J}_z$, принадлежащая собственному значению $J_z = m \pm 1$. Следовательно, $|J^2, m\rangle$ удовлетворяет соотношению (37.18).

Из (37.18) мы видим, что действие оператора $\widehat{J}_+$ на волновую функцию $|J^2, m\rangle$ приводит к увеличению проекции момента $m$ на единицу, а действие оператора $\widehat{J}_-$ приводит к уменьшению $m$ на единицу. Поэтому оператор $\widehat{J}_+$ можно назвать «повышающим», а оператор $\widehat{J}_-$ — «понижающим».

Поскольку по определению величин $m_{\max}$ и $m_{\min}$ состояний с $m > m_{\max}$ и $m < m_{\min}$ не существует, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{J}_+|J^2, m_{\max}\rangle &= 0, \\ \widehat{J}_-|J^2, m_{\min}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (37.21)$$

Отсюда получаем:

$$\widehat{J}_-\widehat{J}_+|J^2, m_{\max}\rangle = 0, \quad \widehat{J}_+\widehat{J}_-|J^2, m_{\min}\rangle = 0.$$

Используя (37.9) и (37.10), запишем эти равенства в виде

$$(\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 - \widehat{J}_z)|J^2, m_{\max}\rangle = 0,$$
$$(\widehat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{J}_z^2 + \widehat{J}_z)|J^2, m_{\min}\rangle = 0,$$

или

$$(J^2 - m_{\max}^2 - m_{\max})|J^2, m_{\max}\rangle = 0,$$
$$(J^2 - m_{\min}^2 + m_{\min})|J^2, m_{\min}\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J^2 - m_{\max}^2 - m_{\max} &= 0, \\ J^2 - m_{\min}^2 + m_{\min} &= 0. \end{aligned} \tag{37.22}$$

Нетрудно проверить, что при естественном условии $m_{\max} \geqslant m_{\min}$ эти два уравнения относительно $m_{\max}$ и $m_{\min}$ совместимы только в том случае, когда

$$m_{\min} \leqslant 0, \qquad m_{\max} = -m_{\min}. \tag{37.23}$$

Введем обозначение

$$m_{\max} \equiv j. \tag{37.24}$$

Тогда из (37.23) получаем

$$m_{\min} = -j, \qquad j \geqslant 0. \tag{10.37.24a}$$

Из (37.22) следует

$$J^2 = j(j+1). \tag{37.25}$$

Итак, при заданном значении $j \geqslant 0$ собственное значение оператора квадрата момента определяется формулой (37.25), а проекция момента на ось $z$ может принимать значения из интервала

$$-j \leqslant m \leqslant j. \tag{37.26}$$

Какие же значения может принимать $j$?

Выше было показано, что если $|J^2, m\rangle$ есть собственная функция операторов $\widehat{\mathbf{J}}^2$ и $\widehat{J}_z$, принадлежащая собственным значениям $J^2 = j(j+1)$ и $J_z = m$, то функция $\widehat{J}_-|J^2, m\rangle$ есть собственная функция тех же операторов, принадлежащая собственным значениям $J^2 = j(j+1)$ и $J_z = m+1$. Поэтому при заданном значении $j$ проекция момента может принимать только следующие значения:

$$m = j,\, j-1,\, j-2,\, \ldots,\, -j. \tag{37.27}$$

В свою очередь, это возможно только в том случае, если $j$ имеет целое или полуцелое значение:

$$j = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \ldots \tag{37.28}$$

При каждом значении $j$ из этой последовательности величина $m$ принимает $(2j + 1)$ значение (37.27). Величина $j$ обычно называется квантовым числом момента количества движения частицы.

Таким образом, исходя из перестановочных соотношений (37.1) для операторов проекций момента на оси координат, мы нашли спектры операторов $\widehat{\mathbf{J}}^2$ и $\widehat{J}_z$. Важным свойством спектра оператора квадрата момента является то, что квантовое число $j$ может принимать не только целые, но и полуцелые значения. Целые значения мы уже получили в § 32 при решении задачи на собственные значения для оператора $\widehat{\mathbf{L}}^2$, где использовался явный вид этого оператора. Сейчас мы видим, что при квантовании момента с использованием лишь перестановочных соотношений спектр получается богаче: наряду с целыми имеются и полуцелые значения квантового числа $j$.

Опыт показывает, что полуцелые значения момента количества движения (в единицах $\hbar$), так же как и целые, реализуются в природе в виде внутреннего момента частиц — *спина*. Электроны, протоны, нейтроны, гипероны, $\mu$-мезоны и нейтрино имеют спин $s = \dfrac{1}{2}$; $\pi$-мезоны и $K$-мезоны имеют спин $s = 0$. Здесь и далее мы будем пользоваться символом $s$ для обозначения квантового числа спинового момента:

$$s^2 = s(s + 1). \tag{37.29}$$

Для квантового числа орбитального момента принято обозначение $l$. Итак, если $l$ может принимать только целые, то $s$ — как целые, так и полуцелые значения.

## § 38. Матрицы операторов момента количества движения

Возьмем совокупность $2j+1$ векторов состояний $|jm\rangle$, где $m$ пробегает, в зависимости от $j$, либо все целые, либо все полуцелые значения от $j$ до $-j$. Здесь квантовое число $j$ может обозначать либо орбитальный момент частицы, либо ее спин, либо, как мы увидим, в § 41, ее полный момент количества движения, образующийся при сложении орбитального момента и спина. Векторы $|jm\rangle$ были введены в § 37 как собственные векторы операторов квадрата момента и его проекции на ось $z$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle,\\ \widehat{J}_z|jm\rangle &= m|jm\rangle.\end{aligned} \tag{38.1}$$

Найдем матрицы различных операторов, построенных из операторов $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$, $\widehat{J}_z$, выбрав векторы $|jm\rangle$ в качестве базиса. С задачей такого типа мы уже имели дело в лекции 8 (упр. 8.6). Чтобы решить ее, удобнее всего было задать операторы проекций орбитального момента частицы в сферических координатах и в соответствии с этим выбрать определенное представление базисных векторов, а именно: $\langle\theta,\,\varphi|lm\rangle = Y_{lm}(\theta,\,\varphi)$. Конечно, наш результат не изменился бы, если бы мы взяли и операторы, и базисные векторы в других, скажем в декартовых, координатах. Подчеркнем, что независимо от того, возьмем ли мы сферические или декартовы координаты, в любом случае мы должны воспользоваться конкретным представлением базисных векторов $|lm\rangle$ и рассматриваемых операторов, после чего дело сводится к вычислению интегралов.

Представим теперь, что нам надо решить задачу типа (упр. 8.6), но не для операторов орбитального момента, а для оператора спина. Например, как выглядит матрица оператора $\widehat{s}_x^2$ в представлении собственных функций операторов $\widehat{\mathrm{s}}^2$ и $\widehat{s}_z$? Пытаясь решить эту задачу по тому же рецепту, что был изложен выше, мы должны были бы первым делом задать явный вид или, другими словами, конкретное представление векторов $|sm_s\rangle$, являющихся собственными векторами операторов $\widehat{\mathrm{s}}^2$ и $\widehat{s}_z$. Как это сделать? От какой переменной зависит спиновая волновая функция $|sm_s\rangle$? Каковы возможные значения этой переменной?

Аппарат, разработанный в предыдущем параграфе, позволяет решить поставленную задачу в обход этих вопросов. Начнем с вычисления матричных элементов операторов $\widehat{J}_+$ и $\widehat{J}_-$.

Для этого вычислим среднее от оператора $\widehat{J}_+\widehat{J}_-$ в состоянии $|jm\rangle$, определенном соотношением (38.1). Согласно (37.9), имеем

$$\langle jm|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|jm\rangle = \frac{1}{2}\{j(j+1) - m^2 - m\}. \tag{38.2}$$

С другой стороны,

$$\langle jm|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|jm\rangle = \sum_{j'm'}\langle jm|\widehat{J}_+|j'm'\rangle\langle j'm'|\widehat{J}_-|jm\rangle. \tag{38.3}$$

Согласно (37.18) матричные элементы операторов $\widehat{J}_+$ и $\widehat{J}_-$ диагональны по $j$, поэтому $j'$ в (38.3) принимает единственное значение $j' = j$. Число $m'$ тоже принимает единственное значение $m' = m - 1$. Таким образом,

$$\langle jm|\widehat{J}_+\widehat{J}_-|jm\rangle = \langle jm|\widehat{J}_+|j, m-1\rangle\langle j, m-1|\widehat{J}_-|jm\rangle = \\ = |\langle jm|\widehat{J}_+|j, m-1\rangle|^2. \quad (38.4)$$

Из (38.2) и (38.4) получаем

$$\langle jm|\widehat{J}_+|j, m-1\rangle = e^{i\delta}\sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}. \quad (38.5)$$

Воспользуемся свободой в выборе фазовых множителей волновых функций $|jm\rangle$ и положим $\delta = 0$. Тогда получим

$$\langle jm|\widehat{J}_+|j, m-1\rangle = \langle j, m-1|\widehat{J}_-|jm\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}. \quad (38.6)$$

Все другие матричные элементы операторов $\widehat{J}_+$ и $\widehat{J}_-$ равны нулю.

Далее найдем матричные элементы операторов $\widehat{J}_x$ и $\widehat{J}_y$. Из (37.6) и (37.7) имеем

$$\widehat{J}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{J}_+ + \widehat{J}_-), \qquad \widehat{J}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{J}_- - \widehat{J}_+). \quad (38.7)$$

Из (38.6) следует, что нетривиальные матричные элементы этих операторов имеют вид

$$\langle jm|\widehat{J}_x|j, m \mp 1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)}, \quad (38.8)$$

$$\langle jm|\widehat{J}_y|j, m \mp 1\rangle = \mp\frac{i}{2}\sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)}. \quad (38.9)$$

Матрицы операторов $\widehat{J}_z$ и $\widehat{\mathbf{J}}^2$ в представлении $|jm\rangle$, очевидно, диагональны:

$$\langle jm|\widehat{J}_z|jm'\rangle = m\delta_{mm'}, \quad (38.10)$$

$$\langle jm|\widehat{\mathbf{J}}^2|jm'\rangle = j(j+1)\delta_{mm'}. \quad (38.11)$$

Итак, мы получили формулы для вычисления диагональных по $j$ матричных элементов операторов $\widehat{J}_+$, $\widehat{J}_-$, $\widehat{J}_x$ и др. Легко показать, что недиагональные по $j$ матричные элементы всех этих операторов равны нулю.

Матрица каждого из операторов $\widehat{J}_+$, $\widehat{J}_-$ и т. п. при фиксированном $j$ имеет размерность $(2j+1)\times(2j+1)$.

Построим, например, эти матрицы для $j=1$. В этом случае имеем

$$m = +1,\, 0,\, -1.$$

Нумеруя строки и столбцы матриц в указанной последовательности, получаем матрицы размерностью $3\times 3$:

$$\widehat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{J}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{J}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (38.12)$$

$$\widehat{J}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{J}}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Базисом для представления операторов (38.12) послужили три вектора $|jm\rangle$: $|1;1\rangle$, $|1;0\rangle$ и $|1;-1\rangle$. Каждый из этих векторов тоже удобно представить в виде матрицы (столбца) в том же представлении:

$$|1\;1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\;0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,\;-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (38.13)$$

Соответственно для бра-векторов $\langle jm|$ получаем

$$\langle 1\;1| = (1\;0\;0), \quad \langle 1\;0| = (0\;1\;0), \quad \langle 1,\;-1| = (0\;0\;1). \qquad (38.14)$$

Рассмотрим примеры использования матриц (38.12) в простейших расчетах.

Пример 1: разложить вектор $\widehat{J}_x\widehat{J}_y|1\;1\rangle$ по базису (38.13).

Решение:

$$\widehat{J}_x\widehat{J}_y|1\ 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}i/2\\0\\i/2\end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\widehat{J}_x\widehat{J}_y|1\ 1\rangle = \frac{i}{2}|1\ 1\rangle + \frac{i}{2}|1,\ -1\rangle.$$

Пример 2: найти среднее значение величины $\widehat{J}_x^2$ в состоянии $|1\ 0\rangle$. Решение:

$$\langle 1\ 0|\widehat{J}_x^2|1\ 0\rangle = (0\ 1\ 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= (0\ 1\ 0) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1.$$

## § 39. Спиновая волновая функция частицы

Волновая функция произвольного состояния бесспиновой частицы является, как мы знаем, функцией трех переменных. В координатном представлении это компоненты радиус-вектора частицы $\mathbf{r} = \{x,\ y,\ z\}$, или $\mathbf{r} = \{r,\ \theta,\ \varphi\}$, в импульсном — компоненты импульса $\mathbf{p} = \{p_x,\ p_y,\ p_z\}$ и т. п. Возьмем теперь частицу со спином $s$. В нерелятивистской квантовой теории величина спина $s$ является вполне определенной характеристикой, присущей каждой частице. Это значит, что оператор квадрата внутреннего момента частицы $\widehat{\mathrm{s}}^2$ при всех обстоятельствах коммутирует с полным гамильтонианом системы, в которую входит частица (в том числе с гамильтонианом свободной частицы), а также с операторами всех динамических переменных, характеризующих движение частицы как целого. Иными словами, спиновые операторы действуют в совсем другом пространстве, нежели пространство переменных $\{x,\ y,\ z\}$ или эквивалентных им переменных, характеризующих поступательное движение частицы.

Пространство спиновой переменной частицы одномерно. В общем случае будем обозначать эту переменную символом $\sigma$. Спиновую волновую функцию частицы будем записывать в виде $\chi(\sigma)$ или $\chi_s(\sigma)$; когда понадобится, будем также снабжать символ $\chi_s(\sigma)$ дополнительными индексами, характеризующими спиновое состояние частицы. Частица со спином $s$ может, например, находиться в одном из $2s+1$ состояний, где определена проекция спина на ось $z$; согласно правилам § 38 мы обозначим их $|sm_s\rangle$, где $m_s = s,\ s-1,\ \ldots,\ -s$. Соответствующую спиновую волновую функцию будем записывать в виде

$$\chi_{sm_s}(\sigma) \equiv \langle\sigma|sm_s\rangle. \tag{39.1}$$

Сравним (39.1) с соответствующей записью пространственной волновой функции частицы (например, для частицы, движущейся по определенной «квантовой орбите» в сферически-симметричном поле):

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) \equiv \langle\mathbf{r}|nlm\rangle. \tag{39.2}$$

Таким образом, в соответствии с терминами, которые мы ввели в § 23, можно сказать, что в выражении (39.1) символ $sm_s$ является индексом состояния, а символ $\sigma$ — индексом представления.

Переменная $\sigma$ — это дискретная переменная. При фиксированном $s$ она принимает $2s+1$ различных значений. Можно, например, взять в качестве $\sigma$ значение проекции спина на ось $z$:

$$\sigma = s_z = s,\ s-1,\ \ldots,\ -s. \tag{39.3}$$

При таком выборе спиновой переменной значения волновой функции (39.1) в точках (39.3) вычисляются по простой формуле:

$$\langle\sigma|sm_s\rangle = \delta_{\sigma m_s}. \tag{39.4}$$

Если расположить все $2s+1$ значений (39.4), отвечающих каждому $m_s$, в определенном порядке (скажем, в порядке следования от $s_z = +s$ до $s_z = -s$) , то мы получим $2s+1$ столбцов по $(2s+{}$ ${}+1)$ элемента в каждом. Каждый из таких столбцов — это вектор состояния $|sm_s\rangle$ в представлении $\sigma = s_z$:

$$|s,\, m_s = s\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ |s,\, m_s = s-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \text{ и т. д.} \tag{39.5}$$

Частным случаем такого представления является запись векторов состояний (38.13) при $s = 1$.

Подчеркнем, что запись векторов состояний $|sm_s\rangle$ в виде столбцов (39.5) отнюдь не универсальна, а связана с выбором определенного представления (39.3). Так, например, один и тот же вектор $|1\ 1\rangle$ (описывающий состояние со спином, равным единице, и его проекцией на ось $z$, тоже равной единице) в представлении (39.3) записывается согласно (39.4)

$$|1\ 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{39.6}$$

а в другом представлении, где $\sigma = s_y$,

$$|1\ 1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{39.7}$$

(см. упр. 10.10).

Спиновые волновые функции называются *спинорами*. Мы будем выбирать их ортонормированными согласно условию (2.16):

$$\langle \chi_{sm_s} | \chi_{sm'_s} \rangle = \sum_{\sigma} \chi^*_{sm_s}(\sigma) \chi_{sm'_s}(\sigma) = \delta_{m_s m'_s}. \tag{39.8}$$

Большое значение имеет также условие полноты

$$\sum_{m_s} \chi_{sm_s}(\sigma) \chi^*_{sm_s}(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}, \tag{39.9}$$

которое можно также записать в виде

$$\sum_{m_s} |\chi_{sm_s}\rangle \langle \chi_{sm_s}| = \widehat{I}. \tag{39.10}$$

Итак, полная волновая функция частицы со спином зависит от четырех переменных, например:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, \sigma) \equiv \langle \mathbf{r}, \sigma | \Psi \rangle. \tag{39.11}$$

Условие нормировки (1.3) имеет вид

$$\sum_{\sigma} \int |\Psi(\mathbf{r}, \delta)|^2 \, d^3\mathbf{r} = 1. \tag{39.12}$$

Пусть $\Psi(\mathbf{r},\,\delta)$ — волновая функция какого-то состояния частицы со спином $s$. В каждой точке $\mathbf{r}$ ее можно разложить по полному набору спиноров (39.5):

$$\Psi(\mathbf{r},\,\delta)=\sum_{m_s=-s}^{s}\psi_{m_s}(\mathbf{r})\chi_{sm_s}(\sigma). \tag{39.13}$$

О каждой из $(2s+1)$ функций $\psi_{m_s}(\mathbf{r})$ в разложении (39.13) можно сказать, что она описывает движение частицы в состоянии, где проекция ее спина на ось $z$ равна $m_s$. Выражение

$$\rho_{m_s}(\mathbf{r})=|\psi_{m_s}(\mathbf{r})|^2 \tag{39.14}$$

есть плотность распределения координаты частицы в этом состоянии, а сумма

$$\rho(\mathbf{r})=\sum_{m_s}\rho_{m_s}(\mathbf{r}) \tag{39.15}$$

— плотность распределения координаты в состоянии с полной волновой функцией (39.13) безотносительно к ориентации спина. С другой стороны, величина

$$p_{m_s}(\mathbf{r})=\frac{\rho_{m_s}(\mathbf{r})}{\sum\limits_{m_s}\rho_{m_s}(\mathbf{r})}=\frac{\rho_{m_s}(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} \tag{39.16}$$

есть относительная вероятность того, что в точке $\mathbf{r}$ проекция спина частицы на ось $z$ равна $m_s$ (заметим, что одновременное измерение положения и проекции спина возможно ввиду коммутативности соответствующих операторов). Наконец, интеграл

$$\int\rho_{m_s}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\equiv W_{m_s} \tag{39.17}$$

есть вероятность того, что в состоянии, описываемом полной волновой функцией (39.13), проекция спина частицы на ось $z$ равна $m_s$ безотносительно к положению частицы в пространстве. Из условия ортонормированности спиноров (39.8) и соотношения (39.12) следует:

$$\sum_{m_s}\int|\psi_{m_s}(\mathbf{r})|^2\,d^3\mathbf{r}=\int\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}=\sum_{m_s}W_{m_s}=1. \tag{39.18}$$

Выше мы рассмотрели волновую функцию частицы со спином в координатном представлении. Переход к импульсному представлению осуществляется по общим правилам:

$$\Psi(\mathbf{r},\,\sigma) = \langle \mathbf{r},\,\sigma|\Psi\rangle = \int \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p},\,\sigma|\Psi\rangle\,d^3\mathbf{p}; \tag{39.19}$$

каждый из $(2s+1)$ элементов спинора $\Psi(\mathbf{p},\,\sigma)$ выражается через соответствующий элемент спинора $\Psi(\mathbf{r},\,\sigma)$ с помощью унитарного преобразования $\langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle$:

$$\psi_{m_s}(\mathbf{p}) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\psi_{m_s}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}. \tag{39.20}$$

Рассмотрим, как в общем случае вычисляются матричные элементы операторов, действующих на пространственные и на спиновую переменные волновой функции частицы со спином. Пусть $\widehat{F}$ — такой оператор, а $\Psi^{(A)}(\mathbf{r},\,\sigma)$ и $\Psi^{(B)}(\mathbf{r},\,\sigma)$ — две волновые функции (которые мы взяли для определенности в координатном представлении). В общем случае оператор $\widehat{F}$ недиагонален по $\sigma$:

$$\widehat{F}\Psi(\mathbf{r},\,\sigma) = \sum_{\sigma'} \widehat{F}(\sigma,\,\sigma')\Psi(\mathbf{r},\,\sigma'), \tag{39.21}$$

здесь $\widehat{F}(\sigma,\,\sigma')$ — оператор, действующий на переменную $\mathbf{r}$. Таким образом, матричный элемент $\langle\Psi^{(A)}|whF|\Psi^{(B)}\rangle$ вычисляется по правилу

$$\langle\Psi^{(A)}|\widehat{F}|\Psi^{(B)}\rangle = \sum_{\sigma\sigma'} \int \Psi^{(A)*}(\mathbf{r},\sigma)\widehat{F}(\sigma,\sigma')\Psi^{(B)}(\mathbf{r},\sigma')\,d^3\mathbf{r}. \tag{39.22}$$

Представим волновые функции $\Psi^{(A)}$ и $\Psi^{(B)}$ в виде (39.13), т. е. разложим их по спинорам $\chi_{sm_s}(\sigma)$, описывающим состояния с определенным значением проекции спина на ось $z$:

$$\Psi^{(A)}(\mathbf{r},\,\sigma) = \sum_{m_s} \psi^{(A)}_{m_s}(\mathbf{r})\chi_{sm_s}(\sigma), \tag{39.23}$$

$$\Psi^{(B)}(\mathbf{r},\,\sigma) = \sum_{m'_s} \psi^{(A)}_{m'_s}(\mathbf{r})\chi_{sm'_s}(\sigma). \tag{39.24}$$

Тогда для (39.22) получаем

$$\langle\Psi^{(A)*}|whF|\Psi^{(B)}\rangle =$$
$$= \sum_{m_s m_s'} \int \psi_{m_s}^{(A)*}(\mathbf{r})\Big\{\sum_{\sigma\sigma'} \chi_{sm_s}^{*}(\sigma)\widehat{F}(\sigma,\,\sigma')\chi_{sm_s'}(\sigma')\Big\}\psi_{m_s'}^{(B)*}(\mathbf{r})\,{}^3\mathbf{r}. \tag{39.25}$$

В фигурных скобках стоят, как мы видим, матричные элементы оператора $\widehat{F}$ в обкладках спиновых состояний с определенными значениями проекции спина на ось $z$:

$$\langle m_s|\widehat{F}|m_s'\rangle \equiv \sum_{\sigma\sigma'} \chi_{sm_s}^{*}(\sigma)\widehat{F}(\sigma,\,\sigma')\chi_{sm_s'}(\sigma'). \tag{39.26}$$

В общем случае матричные элементы (39.26) — это операторы в координатном пространстве, но в простейших частных случаях, когда $\widehat{F}$ представляет собой комбинацию операторов проекций спина, $\langle m_s|\widehat{F}|m_s'\rangle$ — это числовая матрица.

Представим совокупность $(2s+1)$ функций $\psi_{m_s}(\mathbf{r})$, входящих в (39.24) или (39.23), в виде спинора

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{m_s=s}(\mathbf{r}) \\ \psi_{m_s=s-1}(\mathbf{r}) \\ \dots \\ \psi_{m_s=-s}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \tag{39.27}$$

Сопряженный ему спинор запишется в виде строки

$$|\Psi\rangle^{+} = \langle\Psi| = (\psi_{m_s=s}^{*}(\mathbf{r}),\,\psi_{m_s=s-1}^{*}(\mathbf{r}),\,\dots,\,\psi_{m_s=-s}^{*}(\mathbf{r})). \tag{39.28}$$

Тогда видно, что матричный элемент (39.25) можно вычислять по обычным правилам перемножения матриц («строка на столбец»).

$$\langle\Psi^{(A)}|\widehat{F}|\Psi^{(B)}\rangle = \sum_{m_s m_s'} \int \langle\Psi^{(A)}|m_s\rangle\langle m_s|\widehat{F}|m_s'\rangle\langle m_s'|\Psi^{(B)}|\rangle\, d^3\mathbf{r}, \tag{39.29}$$

где $\langle\Psi^{(A)}|m_s\rangle$ — строка функций $\psi_{m_s}^{(A)*}(\mathbf{r})$, а $\langle m_s'|\Psi^{(B)}|\rangle$ — столбец функций $\psi_{m_s}^{(A)*}(\mathbf{r})$.

При выводе правила (39.29) нам нигде не потребовалось выбирать спиновую переменную $\sigma$ в явном виде. Разумеется, результат не зависит от выбора представления. В дальнейшем, если только не будет сделано специальных оговорок, мы будем и спиноры, и матрицы спиновых операторов записывать в представлении $|sm_s\rangle$, где $m_s$ — проекция спина на ось $z$, так, как это было сделано в § 38.

## § 40. Спин $\frac{1}{2}$

Этот случай мы разберем подробнее.

При $s = \dfrac{1}{2}$ проекция спина на выделенное направление принимает два значения: $+\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{2}$. Спиновые волновые функции представляют собой двухкомпонентные спиноры, а спиновые операторы — матрицы размерности $2 \times 2$. Вычислим эти матрицы в представлении $|sm_s\rangle$, где $m_s$ — проекция спина на ось $z$, пользуясь общими формулами из § 38:

$$\widehat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{s}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (40.1)$$

(здесь строки и столбцы идут в следующем порядке: $m_s = +\dfrac{1}{2}$, $m_s = -\dfrac{1}{2}$). Базисные векторы этого представления $\chi_{1/2 m_s} \equiv \equiv |\dfrac{1}{2}, m_s\rangle$ имеют вид:

$$\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (40.2)$$

Операторы проекций спина удобно выразить через соответствующие три матрицы $\widehat{\sigma}_x$, $\widehat{\sigma}_y$, $\widehat{\sigma}_z$ (матрицы Паули):

$$\widehat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\widehat{\sigma}_i, \qquad i = x, y, z, \qquad (40.3)$$

$$\widehat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (40.4)$$

которые обладают следующими свойствами:

а) все матрицы Паули эрмитовы:

$$\widehat{\sigma}_i = \widehat{\sigma}_i^+; \qquad (40.5)$$

б) все матрицы Паули унитарны:

$$\widehat{\sigma}_x\widehat{\sigma}_x^+ = \widehat{\sigma}_y\widehat{\sigma}_y^+ = \widehat{\sigma}_z\widehat{\sigma}_z^+ = \widehat{I}; \qquad (40.6)$$

вместе с (40.5) это дает также

$$\widehat{\sigma}_x^2 = \widehat{\sigma}_y^2 = \widehat{\sigma}_z^2 = \widehat{I}; \tag{40.7}$$

в) различные матрицы Паули антикоммутируют между собой:

$$\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_j = -\widehat{\sigma}_j \widehat{\sigma}_i, \qquad i \neq j; \tag{40.8}$$

г) произведение двух матриц Паули дает третью:

$$\widehat{\sigma}_x \widehat{\sigma}_y = i\widehat{\sigma}_z, \quad \widehat{\sigma}_y \widehat{\sigma}_z = i\widehat{\sigma}_x, \quad \widehat{\sigma}_z \widehat{\sigma}_x = i\widehat{\sigma}_y. \tag{40.9}$$

Все эти соотношения легко проверяются непосредственно, используя вид матриц (40.4).

Соотношения (40.7) и (40.9) можно объединить в одно общее соотношение:

$$\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_j = \widehat{I}\delta_{ij} + i\sum_k e_{ijk}\widehat{\sigma}_k. \tag{40.10}$$

Отсюда легко также получить общую формулу для коммутатора двух матриц Паули:

$$[\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_j] = 2i\sum_k e_{ijk}\widehat{\sigma}_k. \tag{40.11}$$

Помимо матриц (40.4) часто используются (например, в теории элементарных частиц в качестве оператора изоспина нуклона) еще две:

$$\widehat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40.12}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что они имеют смысл проектирующих операторов да состояния $|1/2, 1/2\rangle$ и $|1/2, -1/2\rangle$ соответственно:

$$\begin{aligned} &\widehat{\sigma}_+ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \qquad && \widehat{\sigma}_+ \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = 0, \\ &\widehat{\sigma}_- \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0, && \widehat{\sigma}_- \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \tag{40.13}$$

Пусть $\chi(\sigma)$ — спиновая волновая функция произвольного состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$. Используя волновые функции $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$ в качестве базиса, разложим $\chi(\sigma)$ по этому базису:

$$\chi(\sigma) = a\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sigma) + b\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\sigma). \tag{40.14}$$

В представлении, где $\sigma = s_z$, имеем

$$\chi = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}. \tag{40.15}$$

Коэффициенты $a$ и $b$ должны удовлетворять условию нормировки:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{40.16}$$

а поэтому их всегда можно представить в виде

$$a = e^{i\alpha}\cos\delta, \qquad b = e^{i\beta}\sin\delta, \tag{40.17}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\delta$ — вещественные параметры, принимающие значения из интервалов $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \delta \leqslant \pi/2$. Тогда спиновая функция (40.15) принимает вид

$$\chi = \begin{pmatrix}e^{i\alpha}\cos\delta\\ e^{i\beta}\sin\delta\end{pmatrix}. \tag{40.18}$$

Выясним физические свойства состояния, описываемого волновой функцией (40.18). Для этого вычислим сначала средние значения проекций спина на оси $x$, $y$, $z$. Используя (40.3) и (40.4), получаем

$$\overline{s}_x = \langle\chi|\widehat{s}_x|\chi\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)\sin 2\delta\cos(\alpha-\beta), \tag{40.19}$$

$$\overline{s}_y = \langle\chi|\widehat{s}_y|\chi\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)\sin 2\delta\sin(\alpha-\beta), \tag{40.20}$$

$$\overline{s}_z = \langle\chi|\widehat{s}_z|\chi\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)\cos 2\delta. \tag{40.21}$$

Отсюда видно, например, что при $\delta = 0$ или $\delta = \pi/2$ среднее значение проекции спина на ось $z$ достигает максимального значения $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, при этом средние значения $\overline{s}_x$ и $\overline{s}_y$ равны нулю. При $\delta = \pi/4$ среднее значение вектора спина лежит в плоскости $xy$, а соотношение средних значений $\overline{s}_x$ и $\overline{s}_y$ определяется фазой $\alpha - \beta$ и т. д.

Сейчас мы покажем, что при любых $\alpha$, $\beta$ и $\delta$ существует такое направление, проекция спина на которое имеет максимальное значение $+\frac{1}{2}$.

Зададим произвольное направление в пространстве единичным вектором $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \{n_x,\, n_y,\, n_z\} = \{\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta\}. \tag{40.22}$$

Оператор проекции спина на это направление есть

$$\widehat{s}_n \equiv (\widehat{\mathbf{s}}\mathbf{n}) = \widehat{s}_x n_x + \widehat{s}_y n_y + \widehat{s}_z n_z. \tag{40.23}$$

Подставляя сюда (40.4), получаем

$$\widehat{s}_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \cos\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{40.24}$$

Пусть $|s_n = \frac{1}{2}\rangle$ – собственный вектор оператора (40.24), т. е.

$$\widehat{s}_n|s_n = 1/2\rangle = 1/2|s_n = 1/2\rangle. \tag{40.25}$$

Нетрудно проверить прямой подстановкой в (40.25), что $|s_n = 1/2\rangle$ имеет вид:

$$|s_n = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{40.26}$$

Сравним (40.26) с (40.18). Для этого слепка преобразуем (40.18), выделив фазовый множитель, несущественный при сравнении двух выражений для волновой функции:

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\delta \\ e^{i\beta}\sin\delta \end{pmatrix} = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta e^{i(\beta-\alpha)} \end{pmatrix}. \tag{40.27}$$

Сравнение показывает, что для произвольного состояния (40.18) частицы со спином $\frac{1}{2}$, характеризуемого тремя параметрами $\alpha$, $\beta$ и $\delta$, существует единственное направление $\mathbf{n}$, проекция спина на которое равна $\frac{1}{2}$. Соответствующие значения углов $\theta$ и $\varphi$ выражаются через $\alpha$, $\beta$, $\delta$ по формулам

$$\theta = 2\delta, \qquad \varphi = \beta - \alpha. \tag{40.28}$$

С помощью (40.28) легко найти волновые функции состояний с определенными значениями проекции спина на любые направления. В частности, отсюда получаем

$$|s_x = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (40.29)$$

$$|s_y = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad (40.30)$$

и, конечно,

$$|s_z = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (40.31)$$

Заметим, что векторы (40.29)–(40.31) неортогональны друг другу. Напомним также, что мы выбрали представление $|sm_s\rangle$, где $m_s$ — проекция спина на ось $z$; в другом представлении явный вид спиноров (40.29)–(40.31), разумеется, изменится.

Совершенно условно принято говорить, что в состояниях (40.29)–(40.31) спин частицы направлен по оси $x$, $y$ или $z$ соответственно, равно как и в общем случае (40.18) спин направлен по вектору $\mathbf{n}$, ориентированному в пространстве согласно (40.28). Условность этого выражения связана с тем, что в квантовой механике невозможно одновременно указать определенные значения всех трех проекций момента количества движения на оси $x$, $y$, $z$, поскольку соответствующие операторы $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$, $\widehat{J}_z$ (в частности, спиновые операторы $\widehat{s}_x$, $\widehat{s}_y$ и $\widehat{s}_z$) не коммутируют между собой. А это значит, что никогда невозможно указать и определенное направление вектора момента. Пусть, например, частица находится в состоянии (40.29). В соответствии с принятым условием мы скажем: спин частицы направлен по оси $x$. Однако легко убедиться, что хотя средние значения проекций спина на перпендикулярные направления в этом состоянии равны нулю:

$$\begin{gathered} \overline{s}_y = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0, \\ \overline{s}_z = 0, \end{gathered} \qquad (40.32)$$

соответствующие дисперсии не равны нулю:

$$\overline{(\widehat{s}_y - \overline{s}_y)^2} = \frac{\hbar^2}{4}, \qquad \overline{(\widehat{s}_z - \overline{s}_z)^2} = \frac{\hbar^2}{4}. \qquad (40.33)$$

Таким образом, выражение «спин частицы направлен по оси $x$» применительно к состоянию (40.29), действительно, условно.

Мы рассмотрели случай $s = \frac{1}{2}$. Если спин частицы больше половины, то в этом случае общее выражение спиновой волновой функции не соответствует состоянию с определенным значением проекции спина на какое-либо направление (см. упр. 10.11). Таким образом, если $s \geqslant 1$, то, не накладывая особых ограничений на вид волновой функции, нельзя сказать о направлении спина частицы даже в том узком смысле, как это принято для частиц со спином $s = \frac{1}{2}$.

## Упражнения к лекции 10

**10.1.** Написать матрицы операторов $\widehat{\mathbf{J}}^2$, $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$, $\widehat{J}_z$, $\widehat{J}_+$, $\widehat{J}_-$ для случая $j = \frac{3}{2}$.

**10.2.** Найти среднее значение проекции момента на направление $\mathbf{n}$ в состоянии $|jm\rangle$, где $m$ есть проекция момента на ось $z$.

**10.3.** Найти средние значения величин $J_x^2$, $J_y^2$ в следующих состояниях:

а) $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$; б) $j = 1$, $m = 0$; в) $j = 1$, $m = -1$; г) $j = \frac{3}{2}$, $m = \frac{3}{2}$.

**10.4.** Найти дисперсии величин $J_x$ и $J_y$ в состояниях:

а) $j = 1$, $m = 0$; б) $j = 1$, $m = 1$; в) $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$.

**10.5.** Доказать соотношения:

а) $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2\widehat{I}$,

б) $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{b}) = (\mathbf{ab})\widehat{I} + i([\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$,

в) $\mathrm{Sp}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{b})) = 2i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$,

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — произвольные трехмерные векторы; $\widehat{I}$ — единичный оператор; $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\widehat{\sigma}_x, \widehat{\sigma}_y, \widehat{\sigma}_z\}$ — векторный оператор Паули, компонентами которого являются матрицы Паули (40.4); $\mathrm{Sp}\,\widehat{A}$ — след матрицы $\widehat{A}$.

**10.6.** Упростить коммутатор $[\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{b})]$.

**10.7.** Доказать соотношение

$$e^{i\alpha\widehat{\sigma}_y} = \widehat{I}\cos\alpha + i\widehat{\sigma}_y \sin\alpha,$$

где $\widehat{\sigma}_y$ — матрица Паули, $\alpha$ — произвольный вещественный параметр.

**10.8.** Доказать соотношения

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}})} = \hat{I}\cos\alpha + i(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\alpha,$$
$$e^{\alpha(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}})} = \hat{I}\operatorname{ch}a + (\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}})\operatorname{sh}a,$$

где $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор; $\alpha$, $a$ — вещественные параметры.

**10.9.** Показать, что любую матрицу второго порядка можно разложить по четырем линейно независимым матрицам: $\hat{I}$ (единичная матрица), $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$.

**10.10.** Доказать соотношение (39.7).

**10.11.** Частица со спином $s = 1$ находится в состоянии $\chi = 2^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle)$. Существует ли направление, проекция спина на которое в данном состоянии имеет определенное значение? То же, если частица находится в состоянии $\chi = 3^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,0\rangle + |1,\,-1\rangle)$.

**10.12.** Частица имеет спин $s = \frac{1}{2}$. Убедиться в том, что оператор

$$\hat{R}(\mathbf{n},\,\alpha) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{s}})\right\},$$

где $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор, $\alpha$ — вещественный параметр, есть оператор поворота на угол $\alpha$ вокруг оси $\mathbf{n}$.

# ЛЕКЦИЯ 11

## § 41. Сложение моментов количества движения

### 1. Коэффициенты векторного сложения

Правила квантования, которым подчиняются орбитальный и внутренний моменты количества движения отдельной частицы, оказываются справедливыми для полного момента частицы $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, а также для суммарного орбитального $\mathbf{L} = \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{l}^{(k)}$, спинового $\mathbf{S} = \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{s}^{(k)}$ и полного $\mathbf{J} = \sum\limits_{k=1}^{N}(\mathbf{l}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)})$ моментов количества движения системы частиц. Докажем это утверждение.