**10.8.** Доказать соотношения

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})} = \widehat{I}\cos\alpha + i(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\alpha,$$
$$e^{\alpha(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})} = \widehat{I}\,\mathrm{ch}\,a + (\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\,\mathrm{sh}\,a,$$

где $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор; $\alpha$, $a$ — вещественные параметры.

**10.9.** Показать, что любую матрицу второго порядка можно разложить по четырем линейно независимым матрицам: $\widehat{I}$ (единичная матрица), $\widehat{\sigma}_x$, $\widehat{\sigma}_y$ и $\widehat{\sigma}_z$.

**10.10.** Доказать соотношение (39.7).

**10.11.** Частица со спином $s = 1$ находится в состоянии $\chi = 2^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle)$. Существует ли направление, проекция спина на которое в данном состоянии имеет определенное значение? То же, если частица находится в состоянии $\chi = 3^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,0\rangle + |1,\,-1\rangle)$.

**10.12.** Частица имеет спин $s = \frac{1}{2}$. Убедиться в том, что оператор

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\,\alpha) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{s}})\right\},$$

где $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор, $\alpha$ — вещественный параметр, есть оператор поворота на угол $\alpha$ вокруг оси $\mathbf{n}$.

# ЛЕКЦИЯ 11

## § 41. Сложение моментов количества движения

### 1. Коэффициенты векторного сложения

Правила квантования, которым подчиняются орбитальный и внутренний моменты количества движения отдельной частицы, оказываются справедливыми для полного момента частицы $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, а также для суммарного орбитального $\mathbf{L} = \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{l}^{(k)}$, спинового $\mathbf{S} = \sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{s}^{(k)}$ и полного $\mathbf{J} = \sum\limits_{k=1}^{N}(\mathbf{l}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)})$ моментов количества движения системы частиц. Докажем это утверждение.

Пусть $\mathbf{J}$ есть сумма двух моментов количества движения

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}, \tag{41.1}$$

причем операторы $\widehat{\mathbf{J}}^{(1)}$ и $\widehat{\mathbf{J}}^{(2)}$ подчиняются перестановочным соотношениям (37.4), (37.5):

$$\begin{aligned} &[\widehat{J}_i^{(1)}, \widehat{J}_k^{(1)}] = i\sum_l e_{ikl}\widehat{J}_l^{(1)}, \qquad [(\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2, \widehat{J}_k^{(1)}] = 0, \\ &[\widehat{J}_i^{(2)}, \widehat{J}_k^{(2)}] = i\sum_l e_{ikl}\widehat{J}_l^{(2)}, \qquad [(\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2, \widehat{J}_k^{(2)}] = 0. \end{aligned} \tag{41.2}$$

Из этих соотношений, как было показано в § 37, вытекают правила квантования:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{J}^{(1)})^2 = j_1(j_1+1), \ J_z^{(1)} = m_1 = j_1, \ j_1 - 1, \ \ldots, \ -j_1, \\ &(\mathbf{J}^{(2)})^2 = j_2(j_2+1), \ J_z^{(2)} = m_2 = j_2, \ j_1 - 1, \ \ldots, \ -j_2. \end{aligned} \tag{41.3}$$

Дополним (41.2) перестановочными соотношениями

$$[\widehat{J}_i^{(1)}, \widehat{J}_j^{(2)}] = 0, \tag{41.4}$$

показывающими, что операторы $\widehat{\mathbf{J}}^{(1)}$ и $\widehat{\mathbf{J}}^{(2)}$ действуют в разных пространствах. Из (41.4) также следует

$$[\widehat{J}_i^{(1)}, (\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2] = 0, \qquad [\widehat{J}_i^{(2)}, (\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2] = 0. \tag{41.5}$$

Вводя оператор

$$\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{J}}^{(1)} + \widehat{\mathbf{J}}^{(2)}, \tag{41.6}$$

мы непосредственно получаем из (41.2) и (41.4)–(41.6) следующие перестановочные соотношения для этого оператора:

$$[\widehat{J}_i, \widehat{J}_k] = i\sum_l e_{ikl}\widehat{J}_l, \qquad [\widehat{\mathbf{J}}^2, \widehat{J}_k] = 0, \tag{41.7}$$

$$\begin{aligned} &[\widehat{\mathbf{J}}^2, (\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2] = 0, \qquad [\widehat{J}_k, (\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2] = 0, \\ &[\widehat{\mathbf{J}}^2, (\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2] = 0, \qquad [\widehat{J}_k, (\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2] = 0. \end{aligned} \tag{41.8}$$

Заметим, что в то же время

$$[\widehat{\mathbf{J}}^2, \widehat{J}_k^{(1)}] \neq 0, \qquad [\widehat{\mathbf{J}}^2, \widehat{J}_k^{(2)}] \neq 0. \tag{41.9}$$

Из (41.7) следует, что суммарный момент (41.1) подчиняется общим правилам квантования момента количества движения:

$$\mathbf{J}^2 = j(j+1), \; J_z = m = j, \; j-1, \; \ldots, \; -j. \tag{41.10}$$

Перестановочные соотношения (41.8) показывают, что указание пары квантовых чисел $j$ и $m$ совместимо с указанием другой пары чисел — $j_1$ и $j_2$. Это позволяет поставить вопрос: каковы возможные значения квантового числа $j$ в (41.10) при фиксированных значениях чисел $j_1$ и $j_2$? Рассмотрим его.

Пусть $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$ – собственные функции операторов $(\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2$, $\widehat{J}_z^{(1)}$ и $(\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2$, $\widehat{J}_z^{(2)}$ соответственно. Очевидно, что их произведение

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle \tag{41.11}$$

является собственной функцией оператора $\widehat{J}_z = \widehat{J}_z^{(1)} + \widehat{J}_z^{(2)}$:

$$\widehat{J}_z |j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle = m |j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle, \tag{41.12}$$

причем соответствующее собственное значение этого оператора связано с $m_1$ и $m_2$ простейшим образом:

$$m = m_1 + m_2. \tag{41.13}$$

Легко подсчитать, что полное число различных состояний $|j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle$ при фиксированных $j_1$ и $j_2$ равно $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

Можно убедиться непосредственно (а кроме того, это следует из (41.9)), что $|j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle$ не описывает, вообще говоря, состояния с определенным значением $j$. Введем еще один набор состояний, которые обозначим $|j_1 j_2 j m\rangle$; каждое из них есть одновременно собственное состояние операторов $(\widehat{\mathbf{J}}^{(1)})^2$, $(\widehat{\mathbf{J}}^{(2)})^2$, $(\widehat{\mathbf{J}})^2$ и $\widehat{J}_z$, которые, как было показано выше, коммутируют между собой. При фиксированных $j_1$ и $j_2$ состояния $|j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle$ и $|j_1 j_2 j m\rangle$ представляют собой эквивалентные наборы; поэтому полное число различных состояний в каждом из этих наборов должно быть одним и тем же. Пусть $C^{jm}_{j_1 m_2, j_2 m_2} \equiv \langle j_1 m_1, \, j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$ – это коэффициенты, образующие матрицу преобразования от одного набора к другому:

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1, j_2 m_2} |j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle, \tag{41.14}$$

$$|j_1 m_1, \, j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1, j_2 m_2} |j_1 j_2 j m\rangle \tag{41.15}$$

(мы будем всегда считать эту матрицу вещественной, определяя из этого условия фазовые множители векторов $|j_1 j_2 j m\rangle$. Квантовые числа $m$, $m_1$ и $m_2$, входящие в коэффициенты $C^{jm}_{j_1 m_1, j_2 m_2}$, связаны между собой соотношением (41.13). Чтобы найти при фиксированных $j_1$ и $j_2$ возможные значения $j$, будем рассуждать следующим образом.

Во-первых, убедимся в том, что $j$ не может быть больше арифметической суммы $j_1 + j_2$. Действуя от противного, предположим, что $j > j_1 + j_2$. Тогда согласно (41.10) среди возможных значений $m$ будут такие, которые по абсолютной величине больше, чем $j_1 + j_2$. Это требует соотношения $|m_1 + m_2| > j_1 + j_2$, что противоречит (41.3). Во-вторых, легко видеть, что максимальное значение $j$ не может быть меньше, чем $j_1 + j_2$. Действительно, в противном случае нельзя было бы удовлетворить соотношению (41.15), если в его левой части взять, например, максимальные значения чисел $m_1$ и $m_2$: $m_1 = j_1$ и $m_2 = j_2$. Итак, максимальное значение $j$ равно $j_1 + j_2$.

Полное число состояний $|j_1 j_2 j m\rangle$, соответствующих значению $j_{\max} = j_1 + j_2$ и имеющих разные $m$, есть, очевидно, $2j_{\max} + 1 = 2(j_1 + j_2) + 1$. Присоединяя к ним все состояния $|j_1 j_2 j m\rangle$, соответствующие значениям $j = j_{\max} - 1$, $j = j_{\max} - 2$ и т. д., и устанавливая их соответствие состояниям другого набора $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ мы исчерпаем весь этот набор, когда пройдем весь ряд последовательных значений $j$ от $j_{\max} = j_1 + j_2$ до $j_{\min} = |j_1 - j_2|$. Действительно, полное число различных состояний $|j_1 j_2 j m\rangle$, соответствующих этому интервалу, есть

$$\sum_{j=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1), \tag{41.16}$$

что равно числу различных состояний $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ при тех же значениях $j_1$ и $j_2$.

Итак, при фиксированных $j_1$ и $j_2$ коэффициенты $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ подчиняются условию

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \ldots,\ |j_1 - j_2|, \quad m = m_1 + m_2 \tag{41.17}$$

и образуют квадратную матрицу. Они называются *коэффициентами векторного сложения* (*коэффициентами Клебша–Гордана*).

Для них существует много разных обозначений, в частности следующее:

$$C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \equiv \langle j_1 m_1,\, j_2 m_2 | jm \rangle. \tag{41.18}$$

Из унитарности преобразования (41.14)–(41.15) вытекают соотношения

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1,\, j_2 m_2 | jm\rangle \langle j_1 m_1,\, j_2 m_2 | j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \quad (41.19)$$

$$\sum_{jm} \langle j_1 m_1,\, j_2 m_2 | jm\rangle \langle j_1 m_1',\, j_2 m_2' | jm\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}, \quad (41.20)$$

выражающие свойства ортонормированности и полноты коэффициентов векторного сложения. Ряд других полезных соотношений для этих коэффициентов, которые мы не будем выводить, приведен в Дополнении 11. Имеются таблицы численных значений коэффициентов Клебша–Гордана; существуют также простые формулы для их вычисления (Дополнение 11).

Коэффициенты векторного сложения имеют простой физический смысл. Как видно из (41.14), величина $(C^{jm}_{j_1 m_1, j_2 m_2})^2$ есть вероятность того, что в состоянии $|j_1 j_2 jm\rangle$ (где суммарный момент двух подсистем равен $j$, а его проекция на ось $z$ равна $m$) проекция момента первой подсистемы на ось $z$ имеет определенное значение $m_1$, а проекция момента второй — значение $m_2 = m - m_1$. Та же величина $(C^{jm}_{j_1 m_1, j_2 m_2})^2$ есть согласно (41.15) вероятность того, что в состоянии $|j_1 m_1,\, j_2 m_2\rangle$ (где заданы значения проекций моментов каждой из подсистем) суммарный момент системы равен $j$.

## 2. «Правило треугольника»

Обратимся к соотношениям (41.17). Первое из них определяет, при фиксированных значениях $j_1$ и $j_2$, возможные значения $j$. Однако его можно прочитать и по-другому. Пусть фиксированы, например, $j_1$ и $j_2$. Тогда согласно (41.17) число $j_2$ меняется в пределах:

$$j_2 = j_1 + j,\ j_1 + j - 1,\ \ldots,\ |j_1 - j|. \quad (41.21)$$

Наоборот, если фиксированы $j_2$ и $j$, то для $j_1$ имеем

$$j_1 = j_2 + j,\ j_2 + j - 1,\ \ldots,\ |j_2 - j|. \quad (41.22)$$

Три соотношения (41.17), (41.21) и (41.22) выражают одно и то же правило векторного сложения двух моментов количества движения в квантовой механике. Будем называть его «*правилом треугольника*» и записывать в виде следующего символического равенства:

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 = 0. \quad (41.23)$$

## 3. Векторное сложение спина $s_1 = \frac{1}{2}$ со спином $s_2 = \frac{1}{2}$

Это очень важный частный случай сложения двух моментов количества движения. С ним мы встречаемся, например, при описании спинового состояния протона и электрона в атоме водорода, при сложении спинов или изоспинов двух нуклонов и т. д.

Возьмем систему, состоящую из двух частиц (подсистем) со спинами $s_1 = \dfrac{1}{2}$ и $s_2 = \dfrac{1}{2}$. Введем следующие сокращенные обозначения для спиновых волновых функций $\chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1)$ и $\chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$ каждой из частиц:

$$\begin{aligned} &\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sigma_1) \equiv \chi_\alpha(1), \qquad \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\sigma_1) \equiv \chi_\beta(1), \\ &\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sigma_2) \equiv \chi_\alpha(2), \qquad \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\sigma_2) \equiv \chi_\beta(2), \end{aligned} \tag{41.24}$$

а также спиновой волновой функции всей системы

$$|s_1 s_2 S M_S(\sigma_1, \sigma_2)\rangle \equiv |S M_S\rangle. \tag{41.25}$$

В соответствии с «правилом треугольника» полный спин всей системы может иметь два значения: $S = 0$ и $S = 1$. Вычисляя с помощью таблицы (Д11.5) значения соответствующих коэффициентов векторного сложения, получаем по формуле (41.14) для триплетных состояний ($S = 1$, $M_S = 1, 0, -1$):

$$|1, 1\rangle = \chi_\alpha(1)\chi_\alpha(2), \tag{41.26}$$

$$|1, 0\rangle = 2^{-1/2}\{\chi_\alpha(1)\chi_\beta(2) + \chi_\alpha(2)\chi_\beta(1)\}, \tag{41.27}$$

$$|1, -1\rangle = \chi_\beta(1)\chi_\beta(2), \tag{41.28}$$

и для синглетного состояния ($S = 0$, $M_S = 0$):

$$|0, 0\rangle = 2^{-1/2}\{\chi_\alpha(1)\chi_\beta(2) - \chi_\alpha(2)\chi_\beta(1)\}. \tag{41.29}$$

Обратим внимание на следующую важную особенность: все триплетные состояния описываются симметричными, и синглетное — антисимметричной относительно перестановок частиц 1 и 2 спиновой волновой функцией:

$$|S M_S(\sigma_1, \sigma_2)\rangle = (-1)^{S+1}|S M_S(\sigma_2, \sigma_1)\rangle. \tag{41.30}$$

## 4. Векторное сложение орбитального момента со спином $s = \frac{1}{2}$

Если частица со спином $s = \frac{1}{2}$ находится в состоянии, где ее орбитальный момент равен $l$, то согласно «правилу треугольника» ее полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ может иметь два значения: $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$. Пусть $\Psi_{ljm}(\mathbf{r}, \sigma)$ — волновая функция состояния, в котором полный момент частицы равен $j$, а его проекция на ось $z$ равна $m$. Согласно (41.14) эту волновую функцию можно представить в виде суммы произведений пространственной и спиновой волновых функций частицы:

$$\Psi_{ljm}(\mathbf{r}, \sigma) = \sum_{m_l m_s} \langle lm_l, \tfrac{1}{2}m_s|jm\rangle \varphi_{ljm_l}(\mathbf{r})\chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma). \qquad (41.31)$$

В свою очередь, пространственная волновая функция $\varphi_{ljm_l}(\mathbf{r})$ имеет вид произведения радиальной и угловой функции (см. (32.23)):

$$\varphi_{ljm_l}(\mathbf{r}) = R_{lj}(r)Y_{lm_l}(\theta, \varphi). \qquad (41.32)$$

Числа $m_l = l, l-1, \ldots, -l$ и $m_s = \pm\frac{1}{2}$ в (41.31) — это проекции орбитального момента и спина частицы на ту же ось квантования (ось $z$), относительно которой проекция полного момента $\mathbf{j}$ равна $m$.

Вычислим коэффициенты векторного сложения $\langle lm_l, \frac{1}{2}m_s|jm\rangle$ с помощью таблицы (Д11.5). При фиксированных $j$ и $m$ квантовое число $m_s$ (а следовательно, и $m_l$) принимает, вообще говоря, два значения:

$$m_s = \pm\frac{1}{2}, \qquad m_l = m - m_s = m \mp \frac{1}{2}. \qquad (41.33)$$

Таким образом, матрица коэффициентов $\langle lm_l, \frac{1}{2}m_s|jm\rangle$ имеет размерность $2 \times 2$:

$$\Psi_{l,j=l+\frac{1}{2},m}(\mathbf{r}, \sigma) = \sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}\varphi_{l,j=l+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(\mathbf{r})\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\sigma) + \\ + \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}\varphi_{l,j=l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(\mathbf{r})\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\sigma), \qquad (41.34)$$

$$\Psi_{l,j=l-\frac{1}{2},m}(\mathbf{r}, \sigma) = \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}\varphi_{l,j=l-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(\mathbf{r})\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\sigma) - \\ - \sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}\varphi_{l,j=l-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(\mathbf{r})\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\sigma). \qquad (41.35)$$

В представлении, где $\sigma = s_z$, спиновые функции $\chi_{\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}(\sigma)$ имеют вид (40.2), и волновые функции (41.34), (41.35) удобно записать в виде двурядных спиноров следующего вида:

$$\Psi_{l,j=l+\frac{1}{2},m} = R_{l,j=l+\frac{1}{2}}(r) \times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}Y_{l,m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}Y_{l,m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \qquad (41.36)$$

$$\Psi_{l,j=l-\frac{1}{2},m} = R_{l,j=l-\frac{1}{2}}(r) \times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}Y_{l,m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ -\sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}Y_{l,m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}. \qquad (41.37)$$

В этом представлении операторы $\widehat{\mathbf{j}}^2$ и $\widehat{j}_z$ имеют вид:

$$\widehat{\mathbf{j}}^2 = \widehat{\mathbf{l}}^2 + \widehat{\mathbf{s}}^2 + 2\widehat{\mathbf{l}}\widehat{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{l}}^2 + \frac{3}{4} + \widehat{l}_z & \widehat{l}_x - i\widehat{l}_y \\ \widehat{l}_x + i\widehat{l}_y & \widehat{\mathbf{l}}^2 + \frac{3}{4} - \widehat{l}_z \end{pmatrix}, \qquad (41.38)$$

$$\widehat{j}_z = \widehat{l}_z + \widehat{s}_z = \begin{pmatrix} \widehat{l}_z + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \widehat{l}_z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad (41.39)$$

Используя эти выражения, легко непосредственно убедиться в том, что волновые функции (41.36) и (41.37) описывают состояния с определенными значениями квадрата полного момента и его проекции на ось $z$, т. е.

$$\widehat{\mathbf{j}}^2\Psi_{ljm} = j(j+1)\Psi_{ljm}, \tag{41.40}$$

$$\widehat{j}_z\Psi_{ljm} = m\Psi_{ljm}. \tag{41.41}$$

В § 32 мы условились пользоваться стандартными спектроскопическими обозначениями состояний с определенным значением орбитального момента: $s$, $p$, $d$ и т. д. Будем также пользоваться символом $l_j$ для обозначения состояния частицы с орбитальным моментом $l$ и полным моментом $j$. Например, символ $p_{1/2}$ обозначает состояние с $l = 1$, $j = \frac{1}{2}$; $p_{3/2} - l = 1, j = \frac{3}{2}$; $d_{5/2} - l = 2$; $j = \frac{5}{2}$ и т. д.

## § 42. Оператор магнитного момента частицы

С внутренним механическим моментом частицы — спином — связан ее внутренний (или «спиновый», «собственный») магнитный момент. В нерелятивистской квантовой теории спиновый магнитный момент рассматривается как особое свойство частицы, о котором мы знаем из опыта. Построить оператор спинового магнитного момента частицы в нерелятивистской теории — значит найти общее выражение для такого оператора, куда величина магнитного момента входила бы как параметр, который не вычисляется теоретически, а подлежит определению на основании опытных данных. Мы сначала найдем оператор магнитного момента бесспиновой заряженной частицы, а затем воспользуемся полученным выражением для построения оператора спинового магнитного момента.

В данном параграфе будем обозначать заряд частицы символом $Ze$, где $e$ — абсолютная величина заряда электрона ($e > 0$); таким образом, для электрона $Z = -1$, для протона $Z = +1$ и т. п. Пусть частица с массой $m$ и зарядом $Ze$ помещена в постоянное однородное магнитное поле $\mathscr{H}$. Классическая функция Гамильтона такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{Ze}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{42.1}$$

где $c$ — скорость света, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал электромагнитного поля, который в нашем случае можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathscr{H} \times \mathbf{r}]. \tag{42.2}$$

Подставляя (42.2) в (42.1), получаем

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - (\boldsymbol{\mu}\mathscr{H}) + \frac{(Ze)^2}{8mc^2}[\mathscr{H} \times \mathbf{r}]^2, \tag{42.3}$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{Ze}{2mc}\mathbf{L} \tag{42.4}$$

— магнитный дипольный момент, а $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ — орбитальный момент частицы.

В квантовой механике магнитному моменту (42.4) сопоставляется оператор

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l = (Ze\hbar/2mc)\widehat{\mathbf{l}}, \tag{42.5}$$

где $\widehat{\mathbf{l}}$ — оператор орбитального момента частицы, измеренный в единицах $\hbar$. Комбинация констант

$$\mu_0 \equiv e\hbar/2mc \tag{42.6}$$

при $m$, равном массе электрона, называется *магнетоном Бора* ($\mu_B = e\hbar/2m_e c$); при $m$, равном массе протона, — *ядерным магнетоном* ($\mu_N = e\hbar/2m_p c$). Оператор (42.5) будем также записывать в виде

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l = g_l \boldsymbol{\mu}_0 \widehat{\mathbf{l}} \tag{42.7}$$

где безразмерная константа $g_l$ называется *орбитальным гиромагнитным отношением* (или орбитальным $g$-фактором). Как видно из сравнения (42.7) и (42.5), орбитальное гиромагнитное отношение $g_l$ есть просто заряд частицы в единицах $e$, т. е.

$$g_l = \begin{cases} -1 & \text{для электрона,} \\ +1 & \text{для протона,} \\ \ \ 0 & \text{для нейтрона.} \end{cases} \tag{42.8}$$

Построим оператор спинового магнитного момента частицы по аналогии с (42.7):

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = g_s \mu_0 \widehat{\mathbf{s}}, \tag{42.9}$$

где $\widehat{s}$ — оператор вектора спина частицы. Безразмерная константа $g_s$, называется *спиновым гиромагнитным отношением* (или спиновым $g$-фактором). Она полностью определяет силу взаимодействия внутреннего магнитного момента частицы с внешним однородным магнитным полем:

$$\widehat{H}_{\text{вз}} = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s \mathscr{H} = -g_s \mu_0 (\widehat{\mathbf{s}} \cdot \mathscr{H}). \tag{42.10}$$

Опыт дает следующие значения $g_s$:

$$g_s = \begin{cases} -2 & \text{для электрона,} \\ 5{,}586 & \text{для протона,} \\ -3{,}826 & \text{для нейтрона} \end{cases} \tag{42.11}$$

(заметим, что нейтральная частица — нейтрон — обладает ненулевым внутренним магнитным моментом).

Векторная сумма орбитального и внутреннего магнитных моментов частицы есть ее полный магнитный момент. Этой величине соответствует оператор

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}_l + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = g_l \boldsymbol{\mu}_0 \widehat{\mathbf{l}} + g_s \boldsymbol{\mu}_0 \widehat{\mathbf{s}}. \tag{42.12}$$

Ни у одной из известных элементарных частиц орбитальное и спиновое гиромагнитные отношения не равны друг другу: $g_l \neq g_s$. Поэтому мы не можем написать соотношения пропорциональности типа (42.7) или (42.9), которое связывало бы векторные операторы полного магнитного и полного механического моментов частицы:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} \neq \mathrm{const} \cdot \widehat{\mathbf{j}}. \tag{42.13}$$

Итак, оператор магнитного момента частицы — это векторный (точнее — псевдовекторный) оператор. В качестве табличного значения внутреннего магнитного момента частицы $\mu_s$ принято приводить среднее значение проекции вектора $\boldsymbol{\mu}_s$ на ось квантования в состоянии, где проекция спина на эту ось максимальна (т. е. $m_s = s$). Как следует из (42.9), параметры $g_s$ и $\mu_s$, которые совершенно эквивалентны друг другу, связаны между собой простым соотношением

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \mu_0 s. \tag{42.14}$$

Таким образом, табличные значения внутренних магнитных моментов частиц составляют:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu}_e = -\boldsymbol{\mu}_B && \text{для электрона,} \\ &\boldsymbol{\mu}_p = 2,793\boldsymbol{\mu}_N && \text{для протона,} \\ &\boldsymbol{\mu}_n = -1,913\boldsymbol{\mu}_N && \text{для нейтрона.} \end{aligned}$$

Задавая параметр $\boldsymbol{\mu}_s$, мы полностью определяем оператор внутреннего магнитного момента частицы:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = \boldsymbol{\mu}_s \frac{\widehat{\boldsymbol{s}}}{s}. \tag{42.15}$$

## § 43. Прецессия спина электрона в постоянном однородном магнитном поле

Пусть электрон находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathscr{H}$, направленном по оси $z$. Не будем интересоваться поступательным движением электрона и проследим только за его спином. Тогда гамильтониан системы можно взять в виде

$$\widehat{H} = -(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s \mathscr{H}), \tag{43.1}$$

где $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s$ — оператор спинового магнитного момента электрона (42.9). Вводя матрицы Паули $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$, запишем его в виде

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = -\boldsymbol{\mu}_B \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{43.2}$$

где $\mu_B = e\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора.

Учитывая, что магнитное поле направлено по оси $z$, запишем:

$$\widehat{H} = \boldsymbol{\mu}_B \mathscr{H} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_z. \tag{43.3}$$

Стационарные состояния такой системы — это состояния с определенными значениями проекции спина на ось $z$:

$$|1/2,\, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1/2,\, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{43.4}$$

В этих состояниях энергия системы имеет определенные значения:

$$\begin{aligned} E(1/2) &= \boldsymbol{\mu}_B \mathscr{H}, \\ E(-1/2) &= -\boldsymbol{\mu}_B \mathscr{H}, \end{aligned} \tag{43.5}$$

а «направление» спина (см. § 40) не изменяется со временем.

Пусть, однако, в начальный момент времени $t = 0$ спин электрона направлен не по оси $z$, а, скажем, по оси $x$. Другими словами, пусть спиновая функция электрона при $t = 0$ является собственной функцией оператора проекции спина на ось $x$, принадлежащей собственному значению $s_x = +\frac{1}{2}$ (формула (40.29)):

$$\psi(t = 0) = |s_x = +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{43.6}$$

Это состояние не является стационарным. Как будет изменяться направление спина электрона со временем?

Будем решать эту задачу следующим образом: сначала, пользуясь общим методом § 10, решим уравнение Шредингера с гамильтонианом (43.1) и начальным условием (43.6), а затем, уже зная волновую функцию системы $\psi(t)$ при $t > 0$, установим все интересующие нас свойства системы в произвольный момент времени.

В соответствии с (10.3) имеем

$$\psi(\xi,\, t) = \sum_n c_n \psi_n(\xi) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}. \tag{43.7}$$

Поскольку в нашем случае полный набор состояний $\psi_n$ исчерпывается двумя состояниями (43.4), ищем $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_B \mathscr{H} t} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\mu_B \mathscr{H} t}. \tag{43.8}$$

Здесь $a$ и $b$ — комплексные числа, которые мы найдем из начального условия (43.6):

$$a = b = 2^{-1/2}. \tag{43.9}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \end{pmatrix}, \tag{43.10}$$

где

$$\omega = \frac{\mu_B \mathscr{H}}{\hbar} = \frac{e\mathscr{H}}{2m_e c} \tag{43.11}$$

есть ларморова частота, известная из классической теории прецессии магнитного момента.

В § 40 было показано, что в состоянии

$$\chi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos\delta \\ e^{i\beta} \sin\delta \end{pmatrix} \tag{43.12}$$

спин имеет «направление», определяемое следующими полярным и азимутальным углами (соотношение (40.28)):

$$\theta = 2\delta, \qquad \varphi = \beta - \alpha. \tag{43.13}$$

Сравнивая (43.10) и (43.12), получаем

$$\theta = \pi/2, \qquad \varphi = 2\omega t, \tag{43.14}$$

т. е. спин «вращается» в плоскости $(x,\ y)$ с постоянной угловой скоростью $2\omega$.

Полученный результат аналогичен соответствующему классическому результату: магнитный момент во внешнем постоянном однородном магнитном поле совершает прецессию вокруг направления поля с постоянной частотой. Правда, в рассматриваемом случае эта частота оказывается в два раза большей, чем частота прецессии в классической механике — ларморова частота $\omega = e\mathscr{H}/2m_ec$. Это объясняется тем, что гиромагнитное отношение для электрона в два раза больше соответствующей классической величины (см. (42.11)).

## Упражнения к лекции 11

**11.1.** Найти плотность распределения заряда электрона в следующих состояниях атома водорода:

а) $2p_{\frac{1}{2}},\ m_j = \frac{1}{2}$; б) $2p_{\frac{3}{2}},\ m_j = \frac{1}{2}$;

в) $2p_{\frac{3}{2}},\ m_j = \frac{1}{2}$; г) $3d_{\frac{5}{2}},\ m_j = \frac{3}{2}$.

**11.2.** Пусть в каждом из состояний $|nljm_j\rangle$ некоторого атома при фиксированных $n$, $l$, $j$ находится по одному электрону. Показать, что распределение заряда этой совокупности электронов изотропно.

**11.3.** Доказать, что для произвольной функции $f(r)$ выполняется соотношение

$$\langle nljm_j|f(r)|nl'j'm'_j\rangle = \int\limits_0^\infty R^2_{nl}(r)f(r)r^2\,dr\cdot\delta_{ll'}\delta_{jj'}\delta_{m_jm'_j}.$$

**11.4.** Атомный электрон находится в состоянии $2p_{3/2}$ с проекцией полного момента на ось $z$, равной $m_j = \frac{1}{2}$. Что можно сказать о направлении спина электрона, когда он оказывается на оси $z$; в плоскости, проходящей через ядро атома перпендикулярно оси $z$? Ответить на эти вопросы также в случае следующих состояний: а) $3p_{3/2},\ m_j = \frac{1}{2}$; б) $3d_{3/2},\ m_j = \frac{1}{2}$.

**11.5.** Две частицы со спинами $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$ находятся в состояниях с нулевыми значениями проекции спина на ось $z$. Найти распределение суммарного спина этих частиц.

**11.6.** Найти распределение полного спина системы двух электронов, спины которых антипараллельны.

**11.7.** Спины двух электронов направлены под углом $60°$ друг к другу. Найти вероятность того, что полный спин системы равен единице.

**11.8.** Найти среднее значение оператора $(\widehat{\mathbf{s}}_1\widehat{\mathbf{s}}_2)$ в состояниях с определенными значениями полного спина системы двух электронов; $\widehat{\mathbf{s}}_1$, $\widehat{\mathbf{s}}_2$ — операторы спинов этих электронов.

**11.9.** Частица со спином $1/2$ совершает гармонические колебания в состоянии $1p_{3/2}$, $m_j = \dfrac{1}{2}$. С какой вероятностью в этом состоянии представлен квант колебаний частицы вдоль оси $z$?

**11.10.** Частица со спином $\dfrac{1}{2}$ движется в некотором сферически симметричном поле в состоянии $|nljm_j\rangle$. Найти среднее значение оператора (42.12) полного магнитного момента.

**11.11.** Три частицы со спином $s = 1$ находятся в состояниях с нулевыми значениями проекции спина на ось $z$. Найти распределение суммарного спина этих частиц.

**11.12.** Найти средние значения проекций спина на оси координат в состоянии (43.10).

**11.13.** Рассмотреть задачу § 43 в представлении Гейзенберга.

**11.14.** Рассмотреть прецессию магнитного момента электрона в постоянном однородном магнитном поле, если в начальный момент времени спин электрона направлен под углом $\alpha$ к направлению поля.

**11.15.** В условиях упражнения 11.14 найти среднее значение и дисперсию энергии взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем.

**11.16.** Нейтральная частица со спином $s = 1$ и магнитным моментом $\mu_s$ находится при $t = 0$ в состоянии с проекцией спина на некоторое направление, равной $m_s = +1$. Рассмотреть прецессию магнитного момента в постоянном однородном магнитном поле, перпендикулярном этому направлению и имеющему напряженность $\mathscr{H}$.

**11.17.** Частица имеет спин $\frac{1}{2}$. При каких соотношениях чисел $m_l$, $m_s$ и $m'_l$, $m'_s$, матричный элемент $\langle m_l, m_s|\widehat{\mathbf{s}\mathbf{l}}|m'_l, m'_s\rangle$ отличен от нуля?

**11.18.** Доказать соотношение

$$\frac{1}{2j+1}\sum_{m_j}\langle nljm_j|[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2|nljm_j\rangle = \frac{2}{3}a^2\langle nl|r^2|nl\rangle,$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы.

# ЛЕКЦИЯ 12

## § 44. Опыт Штерна и Герлаха

Среди экспериментов, сыгравших фундаментальную роль в становлении квантовой физики, очень важное место занимает опыт Штерна–Герлаха (1922 г.). Как известно из курса атомной физики, в этом опыте узкий параллельный пучок частиц, обладающих магнитным моментом, пропускался через неоднородное магнитное поле $\mathscr{H}$. Согласно классической электродинамике в таком поле на частицу действует отклоняющая сила

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathscr{H}. \tag{44.1}$$

Если конфигурация поля такова, что $|\mathscr{H}_x| \ll |\mathscr{H}_z|$ и $|\mathscr{H}_y| \ll |\mathscr{H}_z|$, то среднее значение вектора магнитного момента частицы ввиду его прецессии вокруг $\mathscr{H}$ направлено по оси $z$. В этом случае отклоняющая сила $\mathbf{F}$ тоже в среднем направлена по $z$:

$$\overline{\mathbf{F}} = \left\{0,\, 0,\, \mu_z\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial z}\right\}, \tag{44.2}$$

а ее величина пропорциональна $\mu_z$ — проекции магнитного момента частицы на ось $z$. Таким образом, неоднородное магнитное поле действует как анализатор, который сортирует попадающие в прибор Штерна–Герлаха частицы по величине проекции их магнитного момента на характерное для прибора направление — «ось прибора». Историческое значение опыта Штерна–Герлаха заключается в экспериментальном установлении эффекта «пространственного квантования»: пучок, в котором магнитные моменты частиц ориентированы произвольно, расщепляется прибором на несколько отдельных пучков, количество которых строго