11.17. Частица имеет спин $\frac{1}{2}$. При каких соотношениях чисел m_l, m_s и m'_l, m'_s, матричный элемент $\langle m_l, m_s|\widehat{\mathbf{s}\mathbf{l}}|m'_l, m'_s\rangle$ отличен от нуля?

11.18. Доказать соотношение

$$\frac{1}{2j+1}\sum_{m_j}\langle nljm_j|[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2|nljm_j\rangle = \frac{2}{3}a^2\langle nl|r^2|nl\rangle,$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы.

ЛЕКЦИЯ 12

§ 44. Опыт Штерна и Герлаха

Среди экспериментов, сыгравших фундаментальную роль в становлении квантовой физики, очень важное место занимает опыт Штерна–Герлаха (1922 г.). Как известно из курса атомной физики, в этом опыте узкий параллельный пучок частиц, обладающих магнитным моментом, пропускался через неоднородное магнитное поле $\mathscr{H}$. Согласно классической электродинамике в таком поле на частицу действует отклоняющая сила

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathscr{H}. \tag{44.1}$$

Если конфигурация поля такова, что $|\mathscr{H}_x| \ll |\mathscr{H}_z|$ и $|\mathscr{H}_y| \ll |\mathscr{H}_z|$, то среднее значение вектора магнитного момента частицы ввиду его прецессии вокруг $\mathscr{H}$ направлено по оси z. В этом случае отклоняющая сила $\mathbf{F}$ тоже в среднем направлена по z:

$$\overline{\mathbf{F}} = \left\{0,\ 0,\ \mu_z\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial z}\right\}, \tag{44.2}$$

а ее величина пропорциональна μ_z — проекции магнитного момента частицы на ось z. Таким образом, неоднородное магнитное поле действует как анализатор, который сортирует попадающие в прибор Штерна–Герлаха частицы по величине проекции их магнитного момента на характерное для прибора направление — «ось прибора». Историческое значение опыта Штерна–Герлаха заключается в экспериментальном установлении эффекта «пространственного квантования»: пучок, в котором магнитные моменты частиц ориентированы произвольно, расщепляется прибором на несколько отдельных пучков, количество которых строго определяется сортом частиц. Классическая физика не в состоянии объяснить этот результат. Согласно же квантовой механике дело в том, что проекция магнитного момента частицы на любое направление (в том числе на ось прибора) может принимать лишь определенные дискретные значения. В соответствии с (42.9)

$$\mu_z = g_s \mu_0 s_z, \tag{44.3}$$

где s_z — проекция спина частицы на ось z:

$$s_z = s,\ s-1,\ \ldots,\ -s; \tag{44.4}$$

отсюда видно, что количество пучков на выходе из прибора Штерна–Герлаха определяется величиной спина частицы и равно $(2s+1)$.

В данном параграфе мы отвлечемся от многих физических вопросов, относящихся к осуществлению опыта Штерна–Герлаха, и сосредоточим внимание лишь на одном пункте — способности прибора сортировать падающие частицы по величине проекции их спина на некоторое направление.

Пусть в прибор с осью, совпадающей с направлением оси z, попадают частицы со спином s, спиновое состояние которых описывается некоторой заданной волновой функцией $\chi_s(\sigma)$. Мы можем разложить ее по полному набору спиноров (39.1), описывающих состояния с определенным значением проекции спина на ось z. В § 39 мы обозначали эти базисные состояния $|sm_s\rangle$; сейчас мы будем обозначать их $|sm_z\rangle$, поскольку нам потребуется одновременно рассматривать еще и состояния с определенным значением проекции спина на другие оси, в частности состояния $|sm_x\rangle$ и $|sm_y\rangle$. Итак,

$$\chi_s(\sigma) = \sum_{m_z=-s}^{s} \langle sm_z|\chi\rangle |sm_z(\sigma)\rangle \equiv \sum_{m_z} \alpha_{m_z} |sm_z(\sigma)\rangle. \tag{44.5}$$

В представлении, где $\sigma = s_z$, это есть разложение по столбцам (39.5):

$$\chi_s = \alpha_{-s}\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix} + \alpha_{-(s-1)}\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \alpha_s\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{-s}\\\alpha_{-(s-1)}\\\ldots\\\alpha_s\end{pmatrix}. \tag{44.6}$$

Коэффициенты разложения α_{m_z} определяют вероятности различных значений m_z и, следовательно, относительные интенсивности пучков на выходе из прибора Штерна – Герлаха:

$$W(m_z) = |\alpha_{m_z}|^2. \tag{44.7}$$

Разыграем несколько конкретных вариантов опыта Штерна – Герлаха («мысленный эксперимент»). Для простоты возьмем пучок частиц со спином $s = \frac{1}{2}$. В этом случае на выходе из прибора имеется два пучка. В первом (его относительную интенсивность обозначим W_+) спины всех частиц направлены по оси z, во втором (соответствующая интенсивность W_-) — против оси z. Наша задача состоит в том, чтобы найти W_+ и W_- в зависимости от свойств падающего пучка.

Вариант 1. Начнем с простейшего случая, когда все частицы входного пучка находятся в состоянии $|1/2, m_z = 1/2\rangle$, т. е. проекция спина любой частицы на ось z с достоверностью равна $m_z = 1/2$. Очевидно, в этом случае на выходе из прибора будет только один пучок: $W_+ = 100\%$, $W_- = 0$.

Вариант 2. 50 % частиц падающего пучка находятся в состоянии $|1/2, m_z = 1/2\rangle$ и 50 % частиц — в состоянии $|1/2, m_z = -1/2\rangle$. И в этом случае результат очевиден: $W_+ = W_- = 50\,\%$.

Вариант 3. Все 100 % частиц падающего пучка находятся в состоянии $|1/2, m_x = 1/2\rangle$, т. е. спины всех частиц направлены по оси x. По условию наш прибор «не умеет» различать частицы по тому, как ориентированы их спины относительно оси x; он «знает» только один признак: $m_z = +1/2$ или $m_z = -1/2$. Значит, надо представить волновую функцию $|1/2, m_x = 1/2\rangle$ в виде суперпозиции соответствующих базисных функций $|1/2, m_z = 1/2\rangle$ и $|1/2, m_z = -1/2\rangle$. В § 40 мы эту задачу уже решали. По формуле (40.29) имеем:

$$|1/2, m_x = 1/2\rangle = \\ = 2^{-1/2}|1/2, m_z = 1/2\rangle + 2^{-1/2}|1/2, m_z = -1/2\rangle. \tag{44.8}$$

Отсюда согласно (44.7) получаем $W_+ = W_- = 50\,\%$.

Вариант 4. Спины всех частиц падающего пучка направлены вдоль вектора $\mathbf{n} = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\}$, т. е. все частицы находятся в состоянии $|1/2, m_{\mathbf{n}} = 1/2\rangle$, углы θ и φ — любые. Такой вариант есть просто обобщение предыдущего случая, и способ решения здесь тот же: с помощью (40.26) разложим волновую функцию $|1/2,\, m_{\mathbf{n}} = 1/2\rangle$ по базисным

$$|1/2,\, m_{\mathbf{n}}=1/2\rangle = \\ = \cos(\theta/2)|1/2,\, m_z=1/2\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|1/2,\, m_z=-1/2\rangle \tag{44.9}$$

и отсюда согласно (44.7) получим

$$W_+ = \cos^2(\theta/2), \qquad W_- = \sin^2(\theta/2). \tag{44.10}$$

Обратим внимание на то, что результаты нашего мысленного эксперимента в вариантах 2 и 3 совпали. Что это значит? Что совпадают начальные условия 2 и 3, или же что возможности проделанного эксперимента недостаточны для обнаружения различия между этими двумя начальными условиями?

Размышления показывают, что правилен второй ответ, и можно предложить другой эксперимент, чувствительный к различию между начальными условиями 2 и 3. Для этого, не меняя начальных условий, заменим наш прибор Штерна–Герлаха другим, у которого «ось прибора» направлена не по оси z, а по оси x (образно говоря, повернем прибор на 90° вокруг оси y). Частицы, попадающие в этот новый прибор, тоже всегда направляются им по одному из двух характерных для него направлений, но здесь сортировка частиц производится уже по другому признаку: $m_x = \frac{1}{2}$ или $m_x = -\frac{1}{2}$. Обозначим соответствующие относительные интенсивности W'_+ и W'_-. Найдем их значения в вариантах 2 и 3.

Сразу видно, что в варианте 3 новый прибор направляет все частицы по одному направлению: $W'_+ = 100\%$, $W'_- = 0$. Обратимся к варианту 2. Каждая из частиц падающего пучка, находящаяся в состоянии $|1/2, m_z = 1/2\rangle$, имеет одинаковую вероятность выйти из прибора по направлению, соответствующему $m_z = 1/2$, и по направлению, соответствующему $m_x = -1/2$. То же справедливо для падающих частиц, находящихся в состоянии $|1/2, m_z = -1/2\rangle$. По условию между частицами, находящимися в состоянии $|1/2, m_z = 1/2\rangle$ и в состоянии $|1/2, m_z = -1/2\rangle$, нет никакой корреляции. Поэтому получаем $W'_+ = W'_- = 50\,\%$. Легко убедиться в том, что результат $W_+ = W_- = 50\%$ сохранится в варианте 2 при любой другой ориентации оси прибора. Таким образом, начальные условия 2 характеризуют неполяризованное состояние частиц во входном пучке; мы не можем указать в этом случае никакого выделенного направления в пространстве по отношению к спиновым свойствам рассматриваемой системы.

Итак, использование нескольких приборов Штерна–Герлаха с направленными по-разному осями показывает, что начальные условия в вариантах 2 и 3 различны. Это различие имеет очень глубокий характер. В варианте 3 состояние пучка на входе в прибор характеризуется некоторой определенной волновой функцией. Неважно, что в разных представлениях ее можно записать по-разному; мы подчеркиваем другое: в варианте 3 состояние каждой частицы на входе в прибор характеризуется одним, вполне определенным вектором состояния, здесь это $|1/2,\, m_x = 1/2\rangle$. В варианте 2 ситуация другая. Здесь начальные условия заданы так, что невозможно указать никакой одной волновой функции, которая описывала бы состояние всех частиц, попадающих в прибор; какого-либо определенного, единственного вектора начального состояния в варианте 2 нет.

§ 45. Спиновая матрица плотности

В лекции 7 было показано, как описывается состояние физической системы с помощью матрицы плотности. Частным случаем такого подхода является использование так называемой спиновой матрицы плотности, которая является матрицей по спиновым переменным или, вообще говоря, по переменным моментов количества движения системы. Ниже мы познакомимся с основными положениями этой теории.

1. Случай чистого состояния

Подобно тому как это было сделано в § 28, начнем со случая чистого спинового состояния. Пусть $\langle sm_s|\chi\rangle$ — спиновая волновая функция частицы (системы) со спином s. Спиновая матрица плотности такого состояния есть матрица размерности $(2s + 1) \times (2s + 1)$, а ее элементы вычисляются согласно (28.3) по формуле

$$\langle m_s|\widehat{\rho}|m_s'\rangle = \langle sm_s|\chi\rangle\langle\chi|sm_s'\rangle. \tag{45.1}$$

В случае $s = \dfrac{1}{2}$ спиновая матрица плотности есть матрица второго порядка. Построим ее для нескольких конкретных случаев чистого спинового состояния, которые мы по другому поводу уже рассматривали раньше. Пусть сначала проекция спина частицы на ось z равна $\frac{1}{2}$. Такое состояние описывается волновой функцией (40.2), и, следовательно, матрица плотности имеет вид

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{45.2}$$

Если проекция спина равна $\frac{1}{2}$ по отношению к оси x, то аналогично предыдущему, используя (40.29), получаем

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{45.3}$$

Наконец, если спин частицы направлен по вектору $\mathbf{n}$, ориентированному произвольно, то, подставляя в (45.1) волновую функцию (40.26), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\rho} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} \times \left(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{45.4}$$

здесь θ и φ — это полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{n}$. Очевидно, (45.2) и (45.3) есть частные случаи этого выражения. Легко проверить, что матрица плотности (45.4) удовлетворяет всем общим требованиям (28.6)–(28.8) и, кроме того, условию (29.25), которому должна удовлетворять матрица плотности чистого состояния.

2. Случай смешанного состояния

Построим спиновую матрицу плотности для специального случая, рассмотренного в п. 4 § 41. Волновая функция $\Psi_{ljm}(\mathbf{r},\, \sigma)$, даваемая соотношением (41.31), описывает одновременно и движение частицы в пространстве, и ее спиновое состояние. Мы можем отнести этот случай к случаю, рассмотренному в § 30, когда волновая функция системы, состоящей из двух подсистем, не разбивается на произведение волновых функций этих подсистем. Роль обобщенной координаты ξ_1 первой подсистемы играет пространственная координата частицы $\mathbf{r}$, роль обобщенной координаты ξ_2 второй подсистемы — спиновая переменная σ. Согласно общему правилу (30.12) спиновая матрица плотности состояния, описываемого волновой функцией (41.31), строится следующим образом:

$$\langle\sigma|\widehat{\rho}|\sigma'\rangle = \int \Psi_{ljm}(\mathbf{r},\, \sigma)\Psi^*_{ljm}(\mathbf{r},\, \sigma')\, d^3\mathbf{r}. \tag{45.5}$$

Учитывая ортонормированность пространственных волновых функций $\varphi_{ljm_l}(\mathbf{r})$, заметим, что спиновая матрица плотности (45.5) диагональна. Пользуясь (41.36) и (41.37), получим явные выражения спиновой матрицы плотности для соответствующих состояний:

$$\widehat{\rho}_{l,j=l+\frac{1}{2},m} = \begin{pmatrix} \dfrac{l+1/2+m}{2l+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{l+1/2-m}{2l+1} \end{pmatrix}; \tag{45.6}$$

$$\widehat{\rho}_{l,j=l-\frac{1}{2},m} = \begin{pmatrix} \dfrac{l+1/2-m}{2l+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{l+1/2+m}{2l+1} \end{pmatrix}. \tag{45.7}$$

Эти матрицы не удовлетворяют условию (29.25) $\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}$ (исключение — случай $j = l + \dfrac{1}{2}$, $,= \pm j$). Таким образом, состояние с определенным орбитальным l и полным j моментами частицы, а также с определенным значением проекции полного момента m на выделенную ось не является, вообще говоря, чистым спиновым состоянием.

3. Параметризация спиновой матрицы плотности

Выше мы построили спиновую матрицу плотности для системы со спином $\dfrac{1}{2}$ в некоторых конкретных случаях. Как выглядит такая матрица плотности

$$\widehat{\rho} = \|\langle m_s|\widehat{\rho}|m_x'\rangle\| = \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2}|\widehat{\rho}|\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2}|\widehat{\rho}|-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle-\frac{1}{2}|\widehat{\rho}|\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{1}{2}|\widehat{\rho}|-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \tag{45.8}$$

в самом общем случае? Воспользуемся тем (см. упр. 10.9), что любую матрицу второго порядка можно разложить по четырем линейно независимым матрицам: $\widehat{I}$ (единичная матрица), $\widehat{\sigma}_x$, $\widehat{\sigma}_y$ и $\widehat{\sigma}_z$ (три матрицы Паули),

$$\widehat{\rho} = a(\widehat{I} + P_x\widehat{\sigma}_x + P_y\widehat{\sigma}_y + P_z\widehat{\sigma}_z). \tag{45.9}$$

Из условия $\mathrm{Sp}\,\widehat{\rho} = 1$ (соотношения (28.8), (29.3)) получаем $a = \frac{1}{2}$. Тогда, вводя вектор $\mathbf{P}$ с компонентами P_x, P_y, P_z, запишем спиновую матрицу плотности $\widehat{\rho}$ в виде

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{2}(\widehat{I} + \mathbf{P}\widehat{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}. \tag{45.10}$$

Каков физический смысл вектора $\mathbf{P}$ и какие ограничения на его величину накладывают общие условия, предъявляемые к матрице плотности? Для ответа на этот вопрос вычислим среднее значение вектора спина: частицы (системы) в состоянии, описываемом матрицей плотности (45.10):

$$\bar{\mathrm{s}} = \mathrm{Sp}\{\widehat{\rho}\widehat{\mathrm{s}}\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\widehat{\rho}\widehat{\mathrm{s}}\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}. \tag{45.11}$$

Отсюда видно, что вектор $\mathbf{P}$ указывает среднее направление спина частицы, а его величина $P = |\mathbf{P}|$ есть *степень поляризации* частицы. Из общих соображений ясно, что степень поляризации не может выходить за пределы

$$0 \leqslant P \leqslant 1. \tag{45.12}$$

Покажем, что только при этом условии матрица плотности (45.10) удовлетворяет общему требованию (29.23). Действительно,

$$\widehat{\rho}^2 = \frac{1 + P^2}{4}\widehat{I} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} \tag{45.13}$$

и соответственно

$$\mathrm{Sp}\,\widehat{\rho}^2 = \frac{1}{2}(1 + P^2). \tag{45.14}$$

Условию $\mathrm{Sp}\,\widehat{\rho}^2 \leqslant 1$ отвечает неравенство (45.12).

Из (45.13) видно, что матрица плотности состояния, в котором степень поляризации частиц максимальна ($P = 1$), удовлетворяет соотношению $\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}$, которое есть критерий того, что состояние является чистым (см. (28.9)). Если задать направление вектора поляризации $\mathbf{P}$ углами θ и φ, то при $|\mathbf{P}| = 1$ из (45.10) получаем

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & \sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta \cdot e^{i\varphi} & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{45.15}$$

что, естественно, совпадает с (45.4).

В противоположном случае, когда $P = 0$, спиновая матрица плотности пропорциональна единичной матрице:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{45.16}$$

Такая матрица инвариантна относительно любых унитарных преобразований и, в частности, относительно любых поворотов системы координат. Состояние, описываемое матрицей плотности (45.16), есть состояние *неполяризованной системы*: никакое направление в пространстве не выделено по отношению к любым спиновым характеристикам этого состояния. В промежуточном случае, когда $P < 1$, но $P > 0$, говорят о *частично поляризованной системе*.

Мы рассмотрели свойства спиновой матрицы плотности для системы со спином (моментом) $s = \frac{1}{2}$ и видим, что они полностью определяются вектором поляризации системы $\mathbf{R}$. Если момент системы больше $\frac{1}{2}$, то общая параметризация спиновой матрицы плотности оказывается более сложной, чем (45.10). Легко подсчитать, учитывая требование эрмитовости $\widehat{\rho}$ и условие $\mathrm{Sp}\,\widehat{\rho} = 1$, что матрица $\widehat{\rho}$ размерности $(2s+1) \times (2s+1)$ содержит $4s(s+1)$ независимых вещественных параметров. При $s = \frac{1}{2}$ это число равно 3; здесь в качестве трех независимых параметров мы взяли три компоненты вектора поляризации P_x, P_y, P_z или три эквивалентные величины P, θ, φ. При $s = 1$ оно уже равно 8. Поэтому матрица плотности

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{3}\widehat{I} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\widehat{\mathbf{s}}, \tag{45.17}$$

которую можно было бы построить по аналогии с (45.10), не соответствует при $s = 1$ самому общему случаю; в общем случае для описания спинового состояния системы со спином $s = 1$ недостаточно задать только вектор поляризации $\mathbf{P}$.

4. Собственные значения спиновой матрицы плотности

Согласно § 29 каждое смешанное состояние системы можно, рассматривать как некогерентную смесь чистых состояний, которые являются собственными состояниями статистического оператора; статистические веса этих чистых состояний равны соответствующим собственным значениям статистического оператора (матрицы плотности).

Найдем собственные значения ρ_n и соответствующие собственные функции ψ_n операторов (45.10), (45.15):

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(1 + P), \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}(1 - P), \tag{45.18}$$

$$\psi_1 = -e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = -e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} \sin\dfrac{\theta}{2} \\ -\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \tag{45.19}$$

(здесь θ и φ — углы вектора $\mathbf{P}$). Сравнивая (45.19) с (40.26), видим, что собственные функции статистического оператора произвольного спинового состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$ являются собственными функциями оператора проекции спина на вектор поляризации состояния $\mathbf{P}$: $\psi_1 = |1/2,\, \mathrm{s}_P = 1/2\rangle, \psi_2 = |1/2,\, \mathrm{s}_P = -1/2\rangle$.

В частном случае $P = 0$ из (45.18) имеем

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}, \tag{45.20}$$

т. е. статистические веса обоих чистых состоянии одинаковы. Однако в этом случае функции (45.19) не могут быть использованы в качестве собственных функций $\widehat{\rho}$, поскольку углы θ и φ не определены. Легко видеть, что любой нетривиальный спинор является собственной функцией единичного оператора $\widehat{I}$. Поэтому в отсутствие поляризации имеется полная неопределенность в выборе тех чистых состояний, из которых построено смешанное состояние ($\widehat{\rho} = 1/2\widehat{I}$).

5. Еще раз об опыте Штерна–Герлаха

С помощью спиновой матрицы плотности можно очень просто описать всевозможные ситуации в опыте Штерна–Герлаха. Пусть вектор $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta\cos\Phi, \sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$ задает направление оси прибора. Найдем распределение $W(s_n)$ проекции спина частицы на это направление при условии, что частицы, попадающие в прибор, описываются матрицей плотности $\widehat{\rho}$. Согласно (29.14) искомое распределение вероятностей дается формулой

$$W(s_n) = \mathrm{Sp}(\widehat{\rho}\widehat{P}_{s_n}), \tag{45.21}$$

где

$$\widehat{P}_{s_n} = |s,\, s_n\rangle\langle s,\, s_n| \tag{45.22}$$

есть оператор проектирования на состояние $|s,\, s_n\rangle$, являющееся собственным состоянием оператора проекции спина на направление $\mathbf{n}$.

Пусть $s = \frac{1}{2}$. Тогда согласно (40.26) имеем

$$\begin{aligned} |1/2,\, S_n = 1/2\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\Phi} \end{pmatrix}, \\ |1/2,\, S_n = -1/2\rangle &= \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\Phi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{45.23}$$

Следовательно,

$$\widehat{P}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\Phi} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\Phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{45.24}$$

$$\widehat{P}_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\Phi} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\Phi} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{45.25}$$

Подставляя (45.24) и (45.25), а также (45.10) в (45.21), находим

$$W(\pm 1/2) = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{P}\mathbf{n}). \tag{45.26}$$

Рассмотрим частные случаи.

(A) $\mathbf{P} \perp \mathbf{n}$. В этом случае

$$W(\pm 1/2) = \frac{1}{2} \tag{45.27}$$

при любом P (в частности, при $\mathbf{P} \perp \mathbf{n}$ результат не зависит от того, в чистом или смешанном состоянии находятся частицы).

(Б) $\mathbf{P} \parallel \mathbf{n}$. В этом случае

$$W(\pm 1/2) = \frac{1}{2}(1 \pm P). \tag{45.28}$$

При $P = 1$, т. е. для чистого состояния, имеем

$$W(+1/2) = 1, \qquad W(-1/2) = 0, \tag{45.29}$$

т. е. на выходе имеется только один пучок.

(В) $P = 0$. Имеем для любого $\mathbf{n}$

$$W(\pm 1/2) = \frac{1}{2}. \tag{45.30}$$

Сравним полученные результаты с результатами мысленных экспериментов, рассмотренных в § 44.

В варианте 1 рассматривался случай, когда все частицы имели определенное значение $m_z = \frac{1}{2}$ проекции спина на ось прибора. Это значит, что частицы находились в чистом состоянии; модуль вектора поляризации каждой из этих частиц есть $P = 1$, причем $\mathbf{P} \parallel \mathbf{n}$. Следовательно, это есть случай (Б). Результат (45.29), конечно, совпадает с результатом варианта 1.

В варианте 2 рассматривался случай, когда половина частиц находилась в чистом состоянии с $m_z = +\frac{1}{2}$, а половина — в чистом состоянии с $m_z = -\frac{1}{2}$. Поэтому результат опыта Штерна–Герлаха $W(+1/2) = W(-1/2) = \frac{1}{2}$ получался путем простого сложения результатов двух последовательно проводимых опытов: сперва с частицами, имеющими $m_z = +\frac{1}{2}$, а затем с частицами, имеющими $m_z = -\frac{1}{2}$. Легко видеть, что тот же результат получается из (45.26), если для $P = 1$ считать, что в первом случае P параллельно, а во втором — антипараллельно $\mathbf{n}$.

Варианту 3 соответствует $P = 1$, $\mathbf{P} \perp \mathbf{n}$. Результат совпадает с (45.27).

Варианту 4 соответствует $P = 1$, $\mathbf{P}\mathbf{n} = \cos\theta$, где θ — угол между «направлением» спина частицы и осью прибора. Согласно (45.26) в этом случае имеем

$$W(+1/2) = \cos^2\frac{\theta}{2}, \qquad W(-1/2) = \sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{45.31}$$

что, конечно, совпадает с (44.10).

Далее рассмотрим вариант, когда спин половины всех частиц «направлен» под углом θ к оси прибора, а спин другой половины частиц имеет противоположное направление (это есть обобщение варианта 2). Тогда из (45.31) получаем

$$W(+1/2) = \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$W(-1/2) = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$W(+1/2) = W(-1/2) = \frac{1}{2}. \tag{45.32}$$

Мы видим, что вне зависимости от направления θ интенсивности обоих выходных пучков одинаковы.

Этот вариант интересно сравнить со случаем (В), поскольку в этом случае интенсивности пучков на выходе тоже одинаковы при любой ориентации оси прибора Штерна–Герлаха. Смешанное состояние частицы с $P = 0$ экспериментально неотличимо от ансамбля частиц, половина из которых находится в чистом состоянии с определенным значением проекции спина на некоторое произвольное направление, а другая половина находится в чистом состоянии с противоположным направлением спина. Следовательно, такой ансамбль частиц может служить моделью смешанного состояния с $P = 0$. Нетрудно видеть, что существует бесконечное множество таких моделей. Например 25 % частиц полностью поляризовано по оси z, 25 % — против оси z, 25 % полностью поляризовано по оси x, 25 % — против оси x. Все спиновые свойства таких моделей исчерпывающим образом описываются матрицей плотности смешанного состояния (45.16), а именно $\widehat{\rho} = \frac{1}{2}\widehat{I}$.

Упражнения к лекции 12

12.1. Пучок частиц со спином $\frac{1}{2}$, находящихся в состоянии с проекцией спина на ось z, равной $m_z = +\frac{1}{2}$, попадает в анализатор, состоящий из двух последовательно расположенных приборов Штерна–Герлаха. Первый из них пропускает только те частицы, которые имеют проекцию спина на ось x, равную $m_x = +\frac{1}{2}$, а второй сортирует их по величине проекции спина на ось z. Сколько пучков будет на выходе из анализатора и каковы будут их интенсивности по отношению к интенсивности входного пучка? Что изменится, если поменять местами приборы анализатора?

12.2. Две частицы со спином $\frac{1}{2}$ находятся в состоянии $|SM_S\rangle$ с определенными значениями суммарного спина и его проекции на ось z. Найти спиновую матрицу плотности первой частицы в каждом из состояний $|SM_S\rangle$.

12.3. Две частицы со спинами $s_1 = 1$ и $s_2 = \frac{1}{2}$ находятся в состоянии $|SM_S\rangle$ с определенными значениями суммарного спина и его проекции на ось z. Найти спиновую матрицу плотности первой частицы в состоянии $|SM_S\rangle = |3/2\ 1/2\rangle$. При каких значениях S и M_S спиновое состояние первой частицы является чистым?

12.4. Спины двух электронов антипараллельны. Найти матрицу плотности суммарного спина системы.

12.5. Рассмотреть прецессию собственного магнитного момента электрона в постоянном магнитном поле, если в начальный момент состояние спина электрона описывается матрицей плотности (45.10).