Упражнения к лекции 16

16.1. Указать все преобразования, образующие группу симметрии куба.

16.2. То же для тетраэдра.

16.3. Показать, что компоненты радиус-вектора x и y образуют базис двумерного представления группы C_4 (повороты вокруг оси z). Найти матрицы этого представления.

16.4. То же для группы C_3.

16.5. Найти коммутационное соотношение для оператора вектора Рунге–Ленца (упр. 9.11) и оператора орбитального момента частицы в кулоновском поле.

ЛЕКЦИЯ 17

§ 55. Группа трехмерных вращений и ее представления

Представление группы трехмерных вращений R_3 (а также более широкой группы $O_3 = R_3 \times I$) осуществляют операторы поворота (53.21):

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\, \alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(\mathbf{n}\widehat{\mathbf{J}})}. \tag{55.1}$$

В качестве базиса неприводимого представления этой группы можно взять векторы состояний $|jm\rangle$, в которых определен полный момент системы и его проекция на ось z:

$$\widehat{R}(\mathbf{n},\, \alpha)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm}(\mathbf{n},\, \alpha)|jm'\rangle. \tag{55.2}$$

Матрицы неприводимых представлений группы R_3

$$D^{(j)}_{m'm}(\mathbf{n},\, \alpha) = \langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(\mathbf{n}\widehat{\mathbf{J}})}|jm\rangle \tag{55.3}$$

имеют размерность $(2j+1)\times(2j+1)$ и называются *матрицами конечных поворотов*. Они обладают свойством унитарности:

$$\sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m_1 m}(\mathbf{n},\, \alpha) D^{(j)*}_{m_2 m}(\mathbf{n},\, \alpha) = \delta_{m_1 m_2}. \tag{55.4}$$

Имеются подробные таблицы матриц конечных поворотов, дающие явные выражения их матричных элементов через параметры поворота. Однако в некоторых особых случаях не составляет труда построить матрицы $D^{(j)}_{m_1 m_2}(\mathbf{n},\, \alpha)$ и непосредственно по формуле (55.3), без каких-либо таблиц.

Пусть, например, ось $\mathbf{n}$ направлена по оси z. Тогда матрица $D^{(j)}_{m'm}(n_z,\, \alpha)$ диагональна:

$$D^{(j)}_{m'm}(n_z,\, \alpha) = e^{im\alpha}\delta_{mm'} = \begin{pmatrix} e^{ij\alpha} & & & 0 \\ & e^{i(j-1)\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-ij\alpha} \end{pmatrix}, \quad (55.5)$$

т. е. имеет вид приводимой матрицы. Это есть пример того, как неприводимое представление некоторой группы (в данном случае группы R_3) оказывается приводимым по отношению к ее подгруппе (в данном случае — подгруппе R_2 всевозможных поворотов вокруг оси z). В общем случае, когда α, $\mathbf{n}$ произвольны, матрица $D^{(j)}_{m'm}(\mathbf{n},\, \alpha)$ неприводима, а вычислить ее матричный элемент гораздо сложнее, чем в рассмотренном выше примере.

Для вычисления матриц конечных поворотов в общем случае оказывается более удобным использовать вместо параметров поворота $(\mathbf{n},\, \alpha)$ другие эквивалентные параметры — три угла Эйлера α, β, γ. Напомним, что оси исходной системы координат можно совместить с осями любой повернутой системы с помощью последовательности трех поворотов: на угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ вокруг оси z исходной системы; на угол β $(0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ вокруг оси y новой системы; на угол γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi)$ вокруг новой оси z. Соответствующие элементы матрицы конечного поворота вычисляются по формуле

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = \langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}\gamma \widehat{J}_z} e^{\frac{i}{\hbar}\beta \widehat{J}_y} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \widehat{J}_z}|jm\rangle = \\ = e^{im'\gamma}\langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}\beta \widehat{J}_y}|jm\rangle e^{im\alpha}, \quad (55.6)$$

т. е. могут быть легко выражены через более простые матрицы

$$D^{(j)}_{m'm}(\beta) \equiv \langle jm'|e^{\frac{i}{\hbar}\beta \widehat{J}_y}|jm\rangle, \quad (55.7)$$

зависящие лишь от одного параметра — угла β; углы α и γ входят лишь в экспоненциальные множители $e^{im'\gamma}$ и $e^{im\alpha}$:

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\,\beta,\,\gamma) = e^{im'\gamma} d^{(j)}_{m'm}(\beta) e^{im\alpha}. \tag{55.8}$$

Вычислим матрицы $\widehat{d}^{(i)}$ для случая $j = \frac{1}{2}$. Для этого воспользуемся соотношением (упр. 10.7)

$$e^{\frac{i}{\hbar}\beta\widehat{s}_y} = e^{i\frac{\beta}{2}\widehat{\sigma}_y} = \widehat{I}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + i\widehat{\sigma}_y\cdot\sin\frac{\beta}{2}, \tag{55.9}$$

где $\widehat{\sigma}_y$ — матрица Паули. Итак,

$$\widehat{d}^{(1/2)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \tag{55.10}$$

Явный вид матриц $\widehat{d}^{(j)}$ для $j > \frac{1}{2}$ приведен в Дополнении 12.

С помощью матриц конечных поворотов можно рассмотреть любые ситуации в опыте Штерна–Герлаха с частицами произвольного спина. Действительно, пусть осью квантования при описании входного пучка является некоторая ось z', а осью прибора — ось z, составляющая с осью z' угол β. Соответствующим выбором направления осей x и y всегда можно совместить z и z' поворотом системы координат на угол β вокруг оси y. Поэтому, используя (55.2) и (55.8), мы получаем простую связь между базисными векторами спинового состояния частицы в системе с осью z (назовем их $|sm\rangle$) и в системе с осью z' (назовем их $|\widetilde{sm}\rangle$:

$$|\widetilde{sm}\rangle = \sum_{m'=-s}^{s} d^{(s)}_{m'm}(\beta)|sm'\rangle. \tag{55.11}$$

Отсюда видно, например, что если спиновое состояние входного пучка является чистым и все частицы имеют определенную проекцию спина m на некоторую ось z', то относительные интенсивности пучков на выходе из прибора определяются выражением

$$W(m') = |d^{(s)}_{m'm}(\beta)|^2, \quad m' = s,\,\ldots,\,-s, \tag{55.12}$$

где β — угол между осью z' и осью прибора z. Если спиновое состояние входного пучка является смешанным и описывается спиновой матрицей плотности, то для перевода спиновой матрицы плотности из одной системы в другую удобно воспользоваться соотношением

$$\langle sm' | \widetilde{sm} \rangle = d^{(s)}_{m'm}(\beta), \tag{55.13}$$

которое есть просто иной способ записи соотношения (55.11).

§ 56. Теорема Вигнера–Эккарта

Теорема Вигнера–Эккарта представляет собой общую основу получения правил отбора по квантовым числам момента количества движения и его проекций для всевозможных операторов. С математической точки зрения она является частным случаем соотношения (54.24) применительно к группе трехмерных вращении R_3.

Согласно общему определению (54.21) неприводимым тензорным оператором группы R_3 («неприводимым тензором») является совокупность $(2k+1)$ линейных операторов $\{\widehat{T}^{(k)}_p\}$, преобразующихся при повороте системы координат так же, как векторы состояний с определенным моментом и его проекцией:

$$\widehat{\widetilde{T}}{}^{(k)}_p = \sum_{q=-k}^{k} D^{(k)}_{qp}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)\widehat{T}^{(k)}_q; \tag{56.1}$$

здесь $\widehat{D}^{(k)}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ — матрицы конечных поворотов; число k называется рангом неприводимого тензора.

При $k = 0$ неприводимый тензор имеет единственную компоненту $\widehat{T}^{(0)}_0$, которая не изменяется при повороте системы координат. Это либо скаляр, либо псевдоскаляр в зависимости от того, сохраняет или меняет $\widehat{T}^{(0)}_0$ знак при инверсии системы координат.

При $k = 1$ неприводимый тензор содержит три компоненты $\widehat{T}^{(1)}_{0,\,\pm 1}$, которые преобразуются при поворотах системы координат так же, как три сферические функции $Y_{1m}(\theta,\, \varphi)$, образующие базис неприводимого представления $\widehat{D}^{(1)}$. Три декартовы компоненты любого вектора или псевдовектора $\mathbf{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$ можно свести к трем компонентам неприводимого тензора 1-го ранга:

$$T^{(1)}_1 = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}, \quad T^{(1)}_0 = a_z, \quad T^{(1)}_{-1} = \frac{a_x - ia_y}{\sqrt{2}}. \tag{56.2}$$

При $k = 2$ имеется уже пять независимых компонент и т. д.

Пусть надо вычислить матричный элемент $\langle j_1 m_1 | \widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 \rangle$, где $\widehat{T}^{(k)}_{\varkappa}$ — неприводимый тензорный оператор относительно группы R_3. Согласно (54.22) каждый вектор $\widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 \rangle$ есть линейная комбинация векторов, представляющих состояния с определенными моментом количества движения и его проекцией (обозначим их $|\widehat{T}^{(k)} \otimes j_2 \colon jm\rangle$):

$$\widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 = \sum_{jm} \langle k\varkappa,\, j_2 m_2 | jm \rangle | \widehat{T}^{(k)} \otimes j_2 \colon jm \rangle, \tag{56.3}$$

где $\langle k\varkappa,\, j_2 m_2 | jm \rangle$ — известные нам коэффициенты векторного сложения (коэффициенты Клебша–Гордана). Векторы $|\widehat{T}^{(k)} \otimes j_2 \colon jm\rangle$ могут служить базисом (вообще говоря, ненормированным) неприводимого представления $\widehat{D}^{(j)}$. Они ортогональны векторам $|j_1 m_1\rangle$ при $j \neq j_1$ и $m \neq m_1$. Если же $j = j_1$, $m = m_1$, то согласно (54.8) скалярное произведение этих векторов не зависит от m. Исходя из этого, определим *приведенный матричный элемент* $\langle j_1 || \widehat{T}^{(k)} || j_2 \rangle$ оператора $\widehat{T}^{(k)}_{\varkappa}$:

$$\langle j_1 m_1 | \widehat{T}^{(k)} \otimes j_2 \colon jm \rangle = \frac{\langle j_1 || \widehat{T}^{(k)} || j_2 \rangle}{\sqrt{2j_1 + 1}} \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 m} \tag{56.4}$$

(множитель $(2j_1+1)^{-\frac{1}{2}}$ введен ради технического удобства). Составляя скалярное произведение векторов $|j_1 m_1\rangle$ и $\widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 \rangle$ и используя (56.4), получаем формулу, которая выражает теорему Вигнера–Эккарта:

$$\langle j_1 m_1 | \widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 \rangle = \frac{\langle k\varkappa,\, j_2 m_2 | j_1 m_1 \rangle}{\sqrt{2j_1 + 1}} \langle j_1 || \widehat{T^{(k)}} || j_2 \rangle. \tag{56.5}$$

Легко показать, используя свойство ортогональности коэффициентов Клебша–Гордана (41.19), что приведенный матричный элемент удовлетворяет соотношению

$$\langle j_1 || \widehat{T}^{(k)} || j_2 \rangle = (2j_1+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\varkappa m_1 m_2} \langle k\varkappa,\, j_2 m_2 | j_1 m_1 \rangle \langle j_1 m_1 | \widehat{T}^{(k)}_{\varkappa} | j_2 m_2 \rangle. \tag{56.6}$$

Разберем смысл теоремы Вигнера–Эккарта. Соотношение (56.5) показывает, что матричный элемент неприводимого тензорного оператора всегда разбивается на произведение двух множителей. Первый — коэффициент Клебша–Гордана; он включает в себя все квантовые числа матричного элемента и не зависит ни от каких других физических свойств ни рассматриваемой квантовой системы, ни оператора. Второй приведенный — матричный элемент оператора; он не зависит от магнитных квантовых чисел m_1 и m_2, а также индекса $\varkappa$, но зато несет всю информацию о специфике квантовой системы и оператора.

Из свойств коэффициентов Клебша–Гордана следуют правила отбора для матричных элементов (56.5):

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{k} = 0, \tag{56.7}$$

$$\varkappa + m_2 = m_1. \tag{56.8}$$

Это есть обобщение «правила треугольника» (41.23), в котором роль одного из моментов и его проекции играют ранг оператора k и нижний индекс неприводимого тензора $\varkappa$. Назовем соотношения (56.7), (56.8) «обобщенным правилом треугольника».

Рассмотрим п р и м е р ы применения теоремы Вигнера–Эккарта.

1. Начнем с чисто технического упражнения на установление правил отбора для некоторых простых операторов: пусть требуется найти правила отбора для матричных элементов $\langle nlm|\widehat{F}|n'l'm'\rangle$ операторов $\widehat{F} = x,\ y,\ z,\ z^2 - r^2/3,\ z^2$ между состояниями бесспиновой частицы в сферически-симметричной потенциальной яме.

Оператор x есть согласно (56.2) суперпозиция двух компонент неприводимого тензора 1-го ранга:

$$x \sim T_1^{(1)} - T_{-1}^{(1)}. \tag{56.9}$$

Поэтому на основании «обобщенного правила треугольника» (56.7), (56.8) получаем

$$\mathbf{l} + \mathbf{l}' + \mathbf{1} = 0, \quad \text{т. е. } l = l' \text{ (кроме } l = l' = 0\text{)};\ l' \pm 1;\ m = m' \pm 1.$$

Вместе с правилом отбора по четности $(-1)^l = -(-1)^{l'}$ окончательно имеем

$$\begin{aligned} l &= l' \pm 1; \\ m &= m' \pm 1. \end{aligned} \tag{56.10}$$

Легко показать с помощью тех же соотношений (56.2), что таким же правилам отбора удовлетворяет матричный элемент оператора $\widehat{y}$ и что оператору $\widehat{z}$ отвечают правила отбора

$$\begin{aligned} l &= l' \pm 1; \\ m &= m'. \end{aligned} \tag{56.11}$$

Оператор $\widehat{F} = z^2 - \dfrac{1}{3}r^2$ пропорционален сферической функции $Y_{20}(\theta)$:

$$z^2 - \frac{1}{3}r^2 = \frac{2}{3}r^2 P_2(\cos\theta) \sim Y_{20}(\theta),$$

т. е. представляет собой компоненту неприводимого тензора 2-го ранга:

$$z^2 - \frac{1}{3}r^2 \sim T_0^{(2)}. \tag{56.12}$$

На основании «обобщенного правила треугольника» получаем

$$1{+}1'{+}2 = 0, \quad \text{т. е. } l = l' \text{ (кроме } l = l' = 0), \ l'\pm 1, \ l'\pm 2; \ m = m'.$$

Вместе с правилом отбора по четности $(-1)^l = (-1)^{l'}$ окончательно имеем

$$l = l' \text{ (кроме } l = l' = 0), \ l' \pm 2; \ m = m'. \tag{56.13}$$

Итак, основная идея установления правил отбора заключается в том, чтобы разбить оператор на сумму неприводимых тензорных операторов. Применительно к оператору z^2 это означает, что

$$z^2 = \left(z^2 - \frac{1}{3}r^2\right) + \frac{1}{3}r^2 \sim T_0^{(2)} T_0^{(0)}. \tag{56.14}$$

Правила отбора для такого оператора получаются наложением правил отбора (56.13) для оператора $T_0^{(2)}$ и правил отбора для скаляра $T_0^{(0)}$:

$$l = l', \ m = m'. \tag{56.15}$$

В итоге для оператора z^2 имеем

$$l = l', \quad l' \pm 2; \ m = m'. \tag{56.16}$$

2. В качестве второго примера рассмотрим вывод формулы (51.28), которую мы уже использовали в § 51:

$$\langle JM|\widehat{A}_z|JM\rangle = \frac{M}{J(J+1)}\langle JM|\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{J}}|JM\rangle. \tag{56.17}$$

Пусть $\widehat{\mathbf{A}}$ — произвольный псевдовектор (если $\widehat{\mathbf{A}}$ — вектор, диагональный матричный элемент равен нулю в силу правила отбора по четности). Запишем оператор $\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{J}}$ в виде свертки двух тензоров 1-го ранга

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{J}} = \sum_{q=0,\,\pm1} (-1)^q \widehat{A}_q^{(1)} \widehat{J}_{-q}, \tag{56.18}$$

где связь компонент $\widehat{A}_q^{(1)}$ и $\widehat{J}_q$ с декартовыми компонентами операторов $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{J}}$ дается формулами (56.2), и подставим (56.18) в правую часть соотношения (56.17):

$$\langle JM|\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{J}}|JM\rangle = \sum_{q=0,\,\pm1} (-1)^q \sum_{M'} \langle JM|\widehat{A}_q^{(1)}|JM'\rangle\langle JM'|\widehat{J}_{-q}|JM\rangle. \tag{56.19}$$

Опираясь на теорему Вигнера – Эккарта (56.4), можем связать матричный элемент произвольного псевдовектора $\widehat{\mathbf{A}}$ с матричным элементом оператора момента:

$$\langle JM|\widehat{A}_q^{(1)}|JM'\rangle = \frac{\langle J||\widehat{\mathbf{A}}||J\rangle}{\langle J||\widehat{J}||J\rangle} \langle JM|\widehat{J}_q|JM\rangle. \tag{56.20}$$

Подставляя (56.20) в (56.19), получаем

$$\langle JM|\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{J}}|JM\rangle = \frac{\langle J||\widehat{\mathbf{A}}||J\rangle}{\langle J||\widehat{J}||J\rangle} \langle JM|\widehat{\mathbf{J}}^2|JM\rangle = \frac{\langle J||\widehat{\mathbf{A}}||J\rangle}{\langle J||\widehat{J}||J\rangle} J(J+1). \tag{56.21}$$

С другой стороны, применяя формулу (56.20) к левой части соотношения (56.17), имеем

$$\langle JM|\widehat{A}_z|JM\rangle = \frac{\langle J||\widehat{\mathbf{A}}||J\rangle}{\langle J||\widehat{J}||J\rangle} \langle JM|\widehat{J}_z|JM\rangle = \frac{\langle J||\widehat{\mathbf{A}}||J\rangle}{\langle J||\widehat{J}||J\rangle} M. \tag{56.22}$$

Теперь, исключая отношение $\langle J||\widehat{A}||J\rangle / \langle J||\widehat{J}||J\rangle$ из соотношений (56.21) и (56.22), получаем формулу (56.17).

3. В качестве третьего примера применения теоремы Вигнера – Эккарта рассмотрим вопрос о квадрупольном моменте системы заряженных частиц.

Из классической электростатики мы знаем, что взаимодействие системы заряженных частиц с постоянным неоднородным электрическим полем

$$V = -\mathbf{d}\mathscr{E} - \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_i}\right)_0 \tag{56.23}$$

определяется не только вектором электрического дипольного момента $\mathbf{d}$ этой системы, но и тензором электрического квадрупольного момента

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{N} e_n(3x_i^{(n)}x_j^{(n)} - r_n^2\delta_{ij}); \tag{56.24}$$

здесь n — номер частицы в системе, а e_n — ее заряд; $i, j = x, y, z$.

В квантовой теории квадрупольный момент Q_{ij} становится оператором: $Q_{ij} \to \widehat{Q}_{ij}$. Он не коммутирует с гамильтонианом системы, и поэтому имеет смысл говорить лишь о среднем значении квадрупольного момента в различных состояниях системы. Например,

$$\overline{Q}_{ij}|_{JM} = \langle JM|\widehat{Q}_{ij}|JM\rangle. \tag{56.25}$$

Из (56.24) видно, что тензор Q_{ij} симметричен ($Q_{ij} = Q_{ji}$), а его след равен нулю $\left(\sum\limits_i Q_{ii} = 0\right)$. Таким образом, тензор электрического квадрупольного момента системы имеет в общем случае пять независимых компонент. Их можно выразить через пять компонент неприводимого тензорного оператора 2-го ранга

$$\widehat{Q}_q \equiv \sum_n e_n\sqrt{\frac{16\pi}{5}}r_n^2 Y_{2q}(\theta_n, \varphi_n); \quad q = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{56.26}$$

(будем называть его *неприводимым тензорным оператором электрического квадрупольного момента*). Например,

$$\widehat{Q}_{zz} = \sum_{n=1}^{N} e_n(3z_n^2 - r_n^2) = \widehat{Q}_0 \tag{56.27}$$

(см. упр. 17.5).

Таким образом, среднее значение любой компоненты $\widehat{Q}_{ij}$ тензора квадрупольного момента выражается через средние значения пяти операторов $\widehat{Q}_q$. Из них в состоянии $|JM\rangle$ отлично от нуля лишь одно:

$$\overline{Q}_{ij}|_{JM} = \langle JM|\widehat{Q}_0|JM\rangle. \tag{56.28}$$

Поэтому для указания среднего значения электрического квадрупольного момента системы в состоянии с определенным полным моментом J достаточно одного числа. В качестве такового принято использовать среднее значение оператора $\widehat{Q}_0$ в состоянии с максимальным значением проекции полного момента системы:

$$Q \equiv \langle J,\, M = J|\widehat{Q}_0|J,\, M = J\rangle =$$
$$= \left\langle J,\, M = J|\sum_{n=1}^{N} e_n(3z_n^2 - r_n^2)J,\, M = J\right\rangle \quad (56.29)$$

(вспомним аналогичное определение численного значения магнитного момента системы в § 42).

Применяя к (56.29) «обобщенное правило треугольника» (56.7), получаем

$$\mathbf{J} + \mathbf{J} + 2 = 0. \quad (56.30)$$

Если $j < 1$, это правило не может быть выполнено. Таким образом, квантовая система с полным моментом J меньше единицы не имеет квадрупольного момента. Этот результат имеет «симметрийное» происхождение и справедлив для любых систем — для атома, молекулы, атомного ядра, элементарной частицы.

Упражнения к лекции 17

17.1. Частица со спином $\frac{1}{2}$ находится в состоянии, описываемом матрицей плотности $\widehat{\rho} = (\widehat{I} + \widehat{\sigma}_z/2)/2$. Найти матрицу плотности этого состояния в системе координат, повернутой относительно исходной на угол β вокруг оси y.

17.2. То же для состояния с матрицей плотности (45.10).

17.3. Пучок частиц со спином $\frac{3}{2}$ и проекцией спина на импульс, равной $\frac{3}{2}$, попадает в прибор Штерна–Герлаха, ось которого направлена под углом 60° к импульсу частиц. Определить относительные интенсивности выходящих из прибора пучков.

17.4. Частица со спином $s = 1$ находится в состоянии, описываемом волновой функцией $\chi = 2^{-\frac{1}{2}}(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle)$, где $|ss_z\rangle$ — вектор состояния с определенным значением проекции спина частицы на ось z. Существует ли направление, проекция спина на которое в состоянии χ имеет определенное значение?

17.5. Получить соотношения, связывающие компоненты тензора электрического квадрупольного момента системы $\widehat{Q}_{ij}$ с компонентами неприводимого тензорного оператора квадрупольного момента $\widehat{Q}_q$.

17.6. Заряженная частица со спином $s = \dfrac{1}{2}$ находится в состоянии $1d_{5/2}$ в осцилляторном потенциале. Вычислить электрический квадрупольный момент Q этой системы. То же для состояния $1d_{3/2}$. Сравнить полученные значения с квадрупольным моментом аналогичной бесспиновой системы в состоянии $1d$.

17.7. Доказать, что в любом состоянии среднее значение любого псевдовекторного оператора совпадает по направлению со средним значением вектора полного момента системы.

17.8. Вычислить средние значения z^2 и p_z^2 в состоянии $2p_{1/2}$, $m_j = \dfrac{1}{2}$ атома водорода.

17.9. Найти правила отбора для матричных элементов оператора (56.26) между состояниям $|nlm\rangle$ бесспиновой частицы, движущейся в сферически-симметричной потенциальной яме.

17.10. То же для оператора электрического октупольного момента частицы:

$$\widehat{Q}_q^{(\text{октуполь})} = er^3 Y_{3q}(\theta,\, \varphi), \quad q = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3.$$

17.11. Вычислить все матричные элементы $\langle 1p, m_1|\widehat{p}_i|1d, m_2\rangle$ оператора импульса частицы ($i = x,\, y,\, z$) между состояниями $1p$ и $1d$ сферически-симметричного гармонического осциллятора.

ЛЕКЦИЯ 18

§ 57. Симметрия молекул и твердого тела

На практике симметрийный и динамический подходы к исследованию квантовых систем применяются в тесной связи между собой, дополняя и усиливая возможности друг друга. Часто оказывается, что и возможности симметрийного подхода, и даже сами свойства симметрии квантовых систем проявляются особенно отчетливо лишь после того, как при их описании сделаны какие-то упрощения, приближения, касающиеся динамики происходящих