ДОПОЛНЕНИЯ

1. Пространство квадратично-интегрируемых функции L_2

В § 1 было введено линейное гильбертово пространство L_2, которое было определено как множество всех квадратично-интегрируемых комплексных функций n вещественных переменных. Можно показать, что это пространство бесконечномерно, т. е. в нем имеется бесконечно много линейно независимых векторов.

Важным свойством пространства L_2 является существование в нем полных ортонормированных наборов векторов $\{\varphi_i\}_1^\infty$ $(\langle\varphi_i|\varphi_k\rangle = \delta_{ik})$. Как известно, ортонормированный набор векторов называется *полным* в данном пространстве, если в нем нет ни одного вектора, отличного от нуля и ортогонального всем векторам этого набора. Таким образом, набор $\{\varphi_i\}$ называется полным, если из равенства $\langle\psi|\psi_i\rangle = 0$, где φ_i есть любой вектор набора, следует, что $\psi = 0$. Другими словами, ортонормированный набор является полным, если он не может быть расширен путем включения некоторых других векторов пространства. Полный набор в L_2 всегда содержит бесконечное количество векторов.

В § 1 было введено скалярное произведение $\langle\psi_i|\psi_k\rangle$, определенное для любых двух элементов ψ_i, ψ_k из L_2. Одним из свойств скалярного произведения является следующее:

$$\langle\psi_i|\psi_k\rangle \geqslant 0, \tag{Д1.1}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\psi_i = 0$.

Это свойство скалярного произведения позволяет ввести в L_2 норму с помощью соотношения

$$||\psi|| = +\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{Д1.2}$$

Важным свойством пространства L_2 является то, что любой полный ортонормированный набор векторов $\{\varphi_i\}_1^\infty$ образует ортонормированный базис пространства, т. е. любой вектор $\psi \in L_2$

можно однозначно представить в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \tag{Д1.3}$$

где

$$a_k = \langle \varphi_k | \psi \rangle.$$

Написанное разложение понимается в смысле выполнения соотношения

$$\lim_{n\to\infty} ||\psi - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k|| = 0, \tag{Д1.4}$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int \left| \psi(\xi) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(\xi) \right|^2 d\xi = 0.$$

Легко проверить, что условие (Д1.4) эквивалентно соотношению

$$\int |\psi(\xi)|^2 \, d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \tag{Д1.5}$$

которое называется *уравнением замкнутости.*

Условия (Д1.3) или (Д1.5) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями полноты набора $\{\varphi_k\}_1^\infty$.

Покажем теперь, что условие (Д1.5) эквивалентно следующему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi) \psi_k^*(\xi') = \delta(\xi - \xi'), \tag{Д1.6}$$

где $\delta(\xi - \xi')$ — обобщенная функция, которая называется дельта-функцией Дирака (см. Дополнение 4).

Действительно, пусть условие (Д1.6) выполнено. Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi_k | \psi \rangle|^2 = \int \psi(\xi) \psi^*(\xi') \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(\xi) \varphi_k(\xi') \right) d\xi \, d\xi' =$$

$$= \int \psi(\xi) \psi^*(\xi') \delta(\xi - \xi') \, d\xi \, d\xi' = \int |\psi(\xi)|^2 \, d\xi,$$

т. е. из (Д1.6) следует (Д1.5).

Теперь пусть выполнено условие (Д1.5). Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int \psi(\xi)\psi^*(\xi')\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*\varphi_k(\xi')\right) d\xi\, d\xi' = \int |\psi(\xi)|^2\, d\xi.$$

Из этого равенства следует, что

$$\int \psi^*(\xi')\left(\sum_{k=k}^{\infty} \varphi_k^*(\xi)\varphi_k(\xi')\right) d\xi' = \psi^*(\xi),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(\xi)\varphi_k(\xi') = \delta(\xi' - \xi),$$

что и требовалось доказать.

Итак, условие (Д1.6) является необходимым и достаточным условием полноты в L_2 ортонормированного набора $\{\varphi_k\}_1^\infty$.

2. Линейные операторы

Оператор $\widehat{F}$ называется *линейным*, если

$$\widehat{F}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\psi_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i\widehat{F}\psi_i, \tag{Д2.1}$$

где $\{\varphi_i\}_1^k$ — любые векторы из области определения $D_{\widehat{F}}$ оператора $\widehat{F}$, $\{a_i\}_1^k$ — любые комплексные числа.

Оператор $\widehat{F}^{-1}$ называется *обратным* по отношению к оператору $\widehat{F}$, если он удовлетворяет соотношению

$$\widehat{F}\widehat{F}^{-1} = \widehat{F}^{-1}\widehat{F} = \widehat{I}, \tag{Д2.2}$$

где $\widehat{I}$ — единичный оператор.

Оператор $\widehat{F}^+$ называется *эрмитово сопряженным* по отношению к оператору $\widehat{F}$, если оба оператора имеют одну и ту же область определения и выполняется соотношение

$$\langle\widehat{F}\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\widehat{F}^+\psi_2\rangle. \tag{Д2.3}$$

В обозначениях

$$\langle\psi_1|\widehat{A}|\psi_2\rangle \equiv \langle\psi_1|\widehat{A}\psi_2\rangle \tag{Д2.4}$$

условие сопряженности записывается в виде

$$\langle\psi_1|\widehat{F}^+|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\widehat{F}|\psi_1\rangle^*. \tag{Д2.5}$$

Оператор $\widehat{F}$ называется *эрмитовым*, или *самосопряженным*, если $\widehat{F}^+ = \widehat{F}$. Следовательно, эрмитов оператор удовлетворяет соотношению

$$\langle\psi_1|\widehat{F}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\widehat{F}|\psi_1\rangle^*, \tag{Д2.6}$$

где ψ_1, ψ_2 — любые векторы из области определения $\widehat{F}$. Два оператора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ считаются равными

$$\widehat{A} = \widehat{B},$$

если совпадают их области определения, и если на каждом элементе ψ из их области определения значения этих операторов совпадают:

$$\widehat{A}\psi = \widehat{B}\psi.$$

Для любых операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ справедливо соотношение

$$(\widehat{A}\widehat{B})^+ = \widehat{B}^+\widehat{A}^+. \tag{Д2.7}$$

Отсюда вытекает более общее соотношение:

$$(\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\ldots\widehat{F})^+ = \widehat{F}^+\ldots\widehat{C}^+\widehat{B}^+\widehat{A}^+. \tag{Д2.8}$$

Линейный оператор $\widehat{F}$ называется *унитарным*, если

$$\widehat{F}\widehat{F}^+ = \widehat{F}^+\widehat{F} = \widehat{I}, \tag{Д2.9}$$

где $\widehat{I}$ — единичный оператор. Таким образом, унитарный оператор удовлетворяет соотношению

$$\widehat{F}^+ = \widehat{F}^{-1}. \tag{Д2.10}$$

Докажем вещественность дискретного спектра эрмитова оператора. Пусть φ_n — собственная функция эрмитова оператора $\widehat{F}$, принадлежащая собственному значению F_n.

$$\widehat{F}\varphi_n = F_n\varphi_n, \quad \varphi_n \neq 0.$$

Отсюда получаем

$$F_n = \langle \varphi_n|\widehat{F}|\varphi_n\rangle / \langle \varphi_n|\varphi_n\rangle,$$
$$F_n^* = \langle \varphi_n|\widehat{F}|\varphi_n\rangle^* / \langle \varphi_n|\varphi_n\rangle^* = \langle \varphi_n|\widehat{F}^+|\varphi_n\rangle / \langle \varphi_n|\varphi_n\rangle,$$

т. е. $F_n^* = F_n$.

Здесь мы воспользовались свойством (Д2.6) эрмитова оператора.

Покажем, что собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Имеем

$$\widehat{F}\varphi_n = F_n\varphi_n, \quad \widehat{F}\varphi_m = F_m\varphi_m, \quad F_n \neq F_m.$$

Умножим первое уравнение скалярно на φ_m, второе уравнение — на φ_n и вычтем из первого уравнения комплексно сопряженное второе:

$$F_n\langle \varphi_n|\varphi_n\rangle - F_m^*\langle \varphi_n|\varphi_m\rangle^* = \langle \varphi_m|\widehat{F}|\varphi_n\rangle - \langle \varphi_n|\widehat{F}|\varphi_m\rangle^*.$$

Воспользовавшись эрмитовостью оператора $\widehat{F}$ и вещественностью его собственных значений, получаем

$$(F_n - F_m)\langle \varphi_m|\varphi_n\rangle = 0.$$

Поскольку по условию $F_n \neq F_m$, отсюда следует, что

$$\langle \varphi_m|\varphi_n\rangle = 0.$$

Собственное значение F_n, которому соответствует несколько линейно независимых векторов $\varphi_{n\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$), называется *вырожденным*, а число N называется кратностью вырождения этого собственного значения.

Векторы $\{\varphi_{n\alpha}\}_{\alpha=1}^N$, вообще говоря, не являются взаимно ортогональными, но, как известно из линейной алгебры, всегда существует такое линейное преобразование набора $\{\varphi_{n\alpha}\}_{\alpha=1}^N$, что новый набор векторов $\{\psi_{n\beta}\}_{\beta=1}^N$ будет принадлежать тому же собственному значению F_n, и все векторы набора $\{\psi_{n\beta}\}$ взаимно ортогональны. Таким образом, мы можем считать, что все собственные векторы эрмитова оператора взаимно ортогональны. Кроме того, все векторы можно считать нормированными на единицу, поскольку если $||\psi_k|| \neq 1$, то вместо ψ_k можно рассматривать вектор $\psi_k' = \psi_k/||\psi_k||$, который удовлетворяет условию $||\psi_k'|| = 1$.

В дальнейшем мы будем считать, что все собственные векторы эрмитова оператора образуют ортонормированный набор:

$$\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}. \tag{Д2.11}$$

В математике доказывается, что совокупность всех ортонормированных собственных векторов эрмитова оператора с чисто дискретным спектром является *полным* набором в пространстве L_2, а следовательно, ортонормированным базисом этого пространства (см. Дополнение 1).

3. Операторные функции

Пусть $\widehat{F}$ — оператор некоторой физической величины, имеющий собственные функции $\{\varphi_n(\xi)\}$ и обобщенные собственные функции $\{\chi_f(\xi)\}$:

$$\widehat{F}\varphi_n(\xi) = F_n\varphi_n(\xi), \tag{Д3.1}$$

$$\widehat{F}\chi_f(\xi) = f\chi_f(\xi); \tag{Д3.2}$$

где $\{F_n\}$ и $\{f\}$ — точки спектра оператора $\widehat{F}$.

Пусть $p(x)$ — некоторая однозначная функция переменной x. Тогда по определению принимается, что результат действия операторной функции $p(\widehat{F})$ на собственные функции и обобщенные собственные функции оператора $\widehat{F}$ дается формулами:

$$p(\widehat{F})\varphi_n(\xi) = p(F_n)\varphi_n(\xi), \tag{Д3.3}$$

$$p(\widehat{F})\chi_f(\xi) = p(f)\chi_f(\xi). \tag{Д3.4}$$

Поскольку согласно (2.20) любую функцию $\psi(\xi)$ из L_2 можно представить в виде разложения по полному набору $\{\varphi_n\}$, $\{\chi_f\}$ в виде

$$\psi(\xi) = \sum_{\{F_n\}} a_n\varphi_n(\xi) + \int\limits_{\{f\}} a_f\chi_f(\xi)\,df, \tag{Д3.5}$$

$$a_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle, \quad a_f = \langle\chi_f|\psi\rangle,$$

получаем

$$p(\widehat{F})\psi(\xi) = \sum_{\{F_n\}} a_n p(F_n)\varphi_n(\xi) + \int\limits_{\{f\}} a_f p(f)\chi_f(\xi)\,df. \tag{Д3.6}$$

Это соотношение позволяет найти результат действия произвольной операторной функции на любую функцию из L_2.

Особенно простой вид эта формула принимает в том случае, когда функция $p(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m. \tag{Д3.7}$$

В этом случае

$$p(\widehat{F})\psi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{\{F_n\}} a_n F_n^m \varphi_n(\xi) + \int_{\{f\}} a_f f^m \chi_f(\xi)\, df \right). \tag{Д3.8}$$

Используя (Д3.1, Д3.2, Д3.5), отсюда получаем

$$p(\widehat{F})\psi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \widehat{F}^m \psi(\xi).$$

Поскольку функция $\psi(\xi)$ произвольная, отсюда следует

$$p(\widehat{F}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \widehat{F}^m. \tag{Д3.9}$$

4. Дельта-функция Дирака

Дельта-функция Дирака (δ-функция) является обобщенной функцией и определяется как линейный функционал на множестве непрерывных функций S. Пусть $\varphi(\xi)$ — произвольный элемент множества S. Тогда δ-функция определяется как значение функции $\varphi(\xi)$ в точке $\xi = 0$, т.е.

$$\delta[\varphi(\xi)] = \varphi(0). \tag{Д4.1}$$

Это соотношение принято *условно* записывать в виде скалярного произведения некоторой функции $\delta(\xi)$ и функции $\varphi(\xi)$:

$$\delta[\varphi(\xi)] \equiv \langle \delta(\xi) | \varphi(\xi) \rangle = \int \delta(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(0), \tag{Д4.2}$$

хотя легко показать, что не существует функции $\delta(\xi)$, которая удовлетворяла бы этому равенству.

В математике доказывается, что δ-функция может быть представлена в виде предела последовательности функций $\{f_\nu(\xi)\}_1^\infty$, принадлежащих пространству L_2.

$$\delta(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\xi), \tag{Д4.3}$$

причем этот предел понимается в следующем смысле:

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle f_\nu(\xi)|\varphi(\xi)\rangle = \langle\delta(\xi)|\varphi(\xi)\rangle = \varphi(0), \tag{Д4.4}$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная функция из S.

Наиболее часто используются следующие представления δ-функции:

$$\delta(x) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-\nu^2 x^2} = \\ = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\nu}{\nu^2x^2+1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\sin^2\nu x}{\pi x^2\nu}. \tag{Д4.5}$$

Используя первое из этих соотношений, легко показать, что

$$\delta(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk. \tag{Д4.6}$$

Дельта-функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{Д4.7}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{Д4.8}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad a \neq 0, \tag{Д4.9}$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \tag{Д4.10}$$

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i}\right|}, \tag{Д4.11}$$

где x_i — нули функции $f(x)$, n — количество нулей на всей оси x.

Все эти соотношения имеют только тот смысл, что левая и правая части каждого равенства эквивалентны при использовании их в «скалярных произведениях» типа (Д4.2).

Путем замены переменной легко показать, что

$$\int \delta(\xi - \xi_0)\psi(\xi)\, d\xi = \varphi(\xi_0). \tag{Д4.12}$$

В приложениях часто используется формула

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(x - i\varepsilon)^{-1} = \mathscr{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x), \tag{Д4.13}$$

где символ $\mathscr{P}$ указывает на то, что вычисление интеграла надо проводить в смысле главного значения.

5. Теорема о коммутирующих операторах

Докажем теорему, сформулированную в § 4: два эрмитовых оператора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ с чисто дискретными спектрами имеют в L_2 общий полный набор собственных функций тогда и только тогда, когда их коммутатор равен нулю: $\big[\widehat{A},\, \widehat{B}\big] = 0$.

Доказательство необходимости. Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — общий полный набор собственных функций операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, т. е.

$$\widehat{A}\varphi_n = A_n\varphi_n,\ \widehat{B}\varphi_n = B_n\varphi_n.$$

Тогда произвольный вектор ψ из общей области определения операторов $\widehat{A}\widehat{B}$ и $\widehat{B}\widehat{A}$ можно представить в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k.$$

Поэтому

$$\big[\widehat{A},\, \widehat{B}\big]\psi = (\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})\sum_k a_k\varphi_k = \sum_k a_k(A_kB_k - B_kA_k)\varphi_k = 0,$$

т. е. $\big[\widehat{A},\, \widehat{B}\big]\psi = 0$, что и требовалось доказать.

Доказательство достаточности. Пусть $\big[\widehat{A},\, \widehat{B}\big]\psi = 0$, где ψ — любой вектор из общей области определения операторов $\widehat{A}\widehat{B}$ и $\widehat{B}\widehat{A}$.

Рассмотрим множество Γ всех собственных векторов, принадлежащих собственному значению A оператора $\widehat{A}$, т. е. если $\varphi \in \Gamma$, то
$$\widehat{A}\varphi = A\varphi.$$
Легко проверить, что Γ — линейное пространство, размерность которого равна кратности вырождения собственного значения A. Действительно, из того, что φ_1, $\varphi_2 \in \Gamma$, следует
$$\widehat{A}(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1\widehat{A}\varphi_1 + a_2\widehat{A}\varphi_2 = \\ = a_1A\varphi_1 + a_2A\varphi_2 = A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2),$$
т. е. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) \in \Gamma$.

Так же легко проверить выполнение всех других аксиом линейного пространства.

Покажем теперь, что оператор $\widehat{B}$, коммутирующий с $\widehat{A}$, не выводит векторы из Γ. Пусть $\varphi \in \Gamma$, тогда
$$\widehat{A}(\widehat{B}\varphi) = \widehat{B}(\widehat{A}\varphi) = \widehat{B}A\varphi = A(\widehat{B}\varphi),$$
т. е. $\widehat{A}(\widehat{B}\varphi) = A(\widehat{B}\varphi)$.

Следовательно, $\widehat{B}\varphi$ — собственный вектор оператора $\widehat{A}$, принадлежащий собственному значению A, т. е. $\widehat{B}\varphi \in \Gamma$.

Поэтому мы можем рассматривать оператор $\widehat{B}$ как оператор, действующий только в пространстве Γ. Поскольку любой эрмитов оператор в конечномерном пространстве имеет полный в этом пространстве набор собственных векторов, можно утверждать, что $\widehat{B}$ имеет в Γ полный набор собственных векторов $\{\psi_k\}$.

Следовательно, любой вектор $\varphi \in \Gamma$ можно представить в виде разложения по этому набору:
$$\varphi = \sum_k a_k\psi_k,$$
где все ψ_k являются собственными векторами $\widehat{B}$ и одновременно собственными векторами $\widehat{A}$, принадлежащими собственному значению A. Таким образом, доказано, что в Γ существует общий полный набор собственных векторов операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$.

Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — полный набор собственных векторов $\widehat{A}$ в пространстве L_2. Тогда любой вектор $\psi \in L_2$ можно представить в

виде
$$\psi=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k,$$
а любой вектор φ_k можно представить, как только что доказано, в виде линейной комбинации общих собственных векторов операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$.

Таким образом, доказано, что для двух коммутирующих эрмитовых операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в L_2 существует общий полный набор собственных векторов.

6. Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ могут быть определены как такие решения дифференциального уравнения
$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0, \qquad (Д6.1)$$
которые при $|x|\to\infty$ обращаются в бесконечность не быстрее a_nx^n, причем $a_n=2^n$.

Полиномы Эрмита могут быть представлены в виде
$$H_n(x)=\left.\frac{\partial^n\Psi(x,\,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad (Д6.2)$$
где $\Psi(x,\,t)=e^{2tx-t^2}$ – производящая функция этих полиномов, которая выражается через эти же полиномы:
$$\Psi(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \qquad (Д6.3)$$

Полиномы Эрмита образуют на вещественной оси ортогональную систему функций с весом e^{-x^2}:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx=2^nn!\sqrt{\pi}\delta_{mn}. \qquad (Д6.4)$$

Имеют место следующие рекуррентные соотношения:
$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x), \qquad (Д6.5)$$
$$H'{}_n(x)=2nH_{n-1}(x), \qquad (Д6.6)$$
$$xH_n(x)=nH_{n-1}(x)+\frac{1}{2}H_{n+1}(x). \qquad (Д6.7)$$

Первые пять полиномов Эрмита имеют вид:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2,$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12. \qquad \text{(Д6.8)}$$

7. Сферические функции и полиномы Лежандра. Интегралы со сферическими функциями

Сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ являются ограниченными решениями уравнения

$$\widehat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \qquad \text{(Д7.1)}$$

т. е.

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{l^2}{\hbar^2}Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

принадлежащими собственным значениям

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad \text{(Д7.2)}$$

причем

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l. \qquad \text{(Д7.3)}$$

Сферические функции можно представить в виде

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi), \qquad \text{(Д7.4)}$$

где

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta), \qquad \text{(Д7.5)}$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l, \qquad \text{(Д7.6)}$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}. \qquad \text{(Д7.7)}$$

Полином $P_l^m(x)$ называется присоединенной функцией или присоединенным полиномом Лежандра. При $m > 0$ эта функция выражается через полином Лежандра $P_l(x)$:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x), \qquad \text{(Д7.8)}$$

где

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l. \tag{Д7.9}$$

Легко проверить, что

$$\Theta_{lm}(x) = (-1)^m \Theta_{l,\,-m}(x), \tag{Д7.10}$$

$$\Phi^*_m(\varphi) = \Phi_{-m}(\varphi), \tag{Д7.11}$$

откуда получаем

$$Y^*_{lm}(\varphi) = (-1)^m Y_{l,\,-m}(\theta,\,\varphi). \tag{Д7.12}$$

Сферические функции образуют ортонормированный набор

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta,\,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{Д7.13}$$

который является полным в пространстве квадратично-интегрируемых функций, зависящих от θ и φ.

Сферические функции удовлетворяют соотношению (теорема сложения сферических функций)

$$P_l(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\mathbf{n}_1)Y_{lm}(\mathbf{n}_2), \tag{Д7.14}$$

где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — произвольные единичные векторы.

Отсюда легко получить соотношение

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\theta,\,\varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \tag{Д7.15}$$

Из (Д7.4)–(Д7.9) имеем

$$Y_{10}(\theta,\,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta). \tag{Д7.16}$$

Явный вид сферических функций для $l = 0,\,1,\,2$ был приведен в § 32.

Укажем явный вид первых полиномов Лежандра и нормированных присоединенных полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \qquad (\text{Д}7.17)$$

$$\Theta_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \Theta_{10}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \Theta_{1,\pm1}(x) = \mp\sqrt{\frac{3}{4}(1 - x^2)},$$

$$\Theta_{20}(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1),\ \Theta_{2,\pm1}(x) = \mp\sqrt{\frac{15}{4}}x\sqrt{1 - x^2}, \quad (\text{Д}7.18)$$

$$\Theta_{2,\pm2}(x) = \sqrt{\frac{15}{16}}(1 - x^2).$$

Часто оказывается полезным значение следующего интеграла:

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta,\ \varphi)Y_{l_1m_1}(\theta,\ \varphi)Y_{l_2m_2}(\theta,\ \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)}}\langle l_1 0 l_2 0|l0\rangle\langle l_1 m_1 l_2 m_2|lm\rangle, \quad (\text{Д}7.19)$$

где $\langle l_1 m_1 l_2 m_2|lm\rangle$ — коэффициент векторного сложения.

Отметим следующую важную формулу:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{r_1}\sum\limits_{lm}\dfrac{1}{2l+1}\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^l Y^*_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y_{lm}(\theta_2,\varphi_2) & \text{при } r_1 > r_2, \\ \dfrac{4\pi}{r_2}\sum\limits_{lm}\dfrac{1}{2l+1}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^l Y^*_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y_{lm}(\theta_2,\varphi_2) & \text{при } r_1 < r_2, \end{cases}$$

(Д7.20)

где $(\theta_1,\ \varphi_1)$ и $(\theta_2,\ \varphi_2)$ — полярный и азимутальный углы векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

8. Цилиндрические функции полуцелого порядка

В квантовой механике широко используются следующие функции, просто связанные с цилиндрическими функциями Бесселя $J_\nu(\rho)$ полуцелого порядка:

1) $j_l(\rho) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\rho}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ — сферическая функция Бесселя; (Д8.1)

2) $n_l(\rho) = (-1)^{l+1}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\rho}} J_{-l-1/2}(\rho)$ — сферическая функция Неймана; $l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ (Д8.2)

Эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\right] f(\rho) = 0 \qquad (Д8.3)$$

и имеют следующее поведение при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$:

$$j_l(\rho) \approx \frac{\rho^l}{1{\cdot}3{\cdot}5\ldots(2l{+}1)}, \qquad n_l(\rho) \approx -\frac{1{\cdot}1{\cdot}3{\cdot}5\ldots(2l{-}1)}{\rho^{l+1}} \quad \text{при } \rho \to 0; \qquad (Д8.4)$$

$$j_l(\rho) \approx \frac{1}{\rho}\cos\Big(\rho - \frac{l{+}1}{2}\pi\Big), \quad n_l(\rho) \approx \frac{1}{\rho}\sin\Big(\rho - \frac{l{+}1}{2}\pi\Big) \quad \text{при } \rho \to \infty. \qquad (Д8.5)$$

При любом значении l функции $j_l(\rho)$ и $n_l(\rho)$ выражаются через $\sin\rho$ и $\cos\rho$. Для $l = 0,\, 1,\, 2$ имеем

$$\begin{gathered}
j_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}, \quad n_0(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho},\\
j_1(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho^2} - \frac{\cos\rho}{\rho}, \quad n_1(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho^2} - \frac{\sin\rho}{\rho},\\
j_2(\rho) = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right)\sin\rho - \frac{3}{\rho^2}\cos\rho,\\
n_2(\rho) = -\left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right)\cos\rho - \frac{3}{\rho^2}\sin\rho.
\end{gathered} \qquad (Д8.6)$$

Ниже приведены значения положительных корней уравнения

$$j_l(x_k) = 0, \quad l = 0,\, 1,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6, \qquad (Д8.7)$$

расположенные в порядке возрастания их величины:

x	3,142	4,493	5,763	6,283	6,988	7,725
l	0	1	2	0	3	1

(Д8.8)

x	8,18	9,10	9,36	9,42	10,45	10,50	10,90
l	4	2	5	0	3	6	1

Часто используются линейные комбинации функций $j_l(\rho)$ и $n_l(\rho)$:

$$h_l^{(1)}(\rho) = j_l(\rho) + i n_l(\rho), \quad h_l^{(2)}(\rho) = j_l(\rho) - i n_l(\rho), \tag{Д8.9}$$

которые называются сферическими функциями Ханкеля первого и второго рода соответственно.

Асимптотики этих функций имеют вид

$$h_l^{(1)}(\rho) \approx \frac{1}{\rho} e^{i\left[\rho - \frac{1}{2}(l+1)\pi\right]},$$
$$h_l^{(2)}(\rho) \approx \frac{1}{\rho} e^{-i\left[\rho - \frac{1}{2}(l+1)\pi\right]} \quad \text{при } \rho \to \infty. \tag{Д8.10}$$

Заметим, что в случае чисто мнимого значения аргумента ($\rho = i\beta r$, $\beta > 0$) только $h_l^{(1)}(\rho)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ и является квадратично-интегрируемой функцией. Приведем явный вид этой функции при $l = 0, 1, 2$:

$$h_0^{(1)}(i\beta r) = -\frac{1}{\beta r} e^{-\beta r},$$
$$h_1^{(1)}(i\beta r) = i\left(\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2}\right) e^{-\beta r}, \tag{Д8.11}$$
$$h_2^{(1)}(i\beta r) = i\left(\frac{1}{\beta r} + \frac{3}{\beta^2 r^2} + \frac{3}{\beta^3 r^3}\right) e^{-\beta r}.$$

9. Разложение плоской волны по сферическим функциям

В различных приложениях широко используется следующее разложение плоской волны по сферическим функциям:

$$e^{i\mathbf{kr}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\Theta,\, \Phi) Y_{lm}(\theta,\, \varphi), \tag{Д9.1}$$

где Θ, Φ — полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{k}$, а θ, φ — углы вектора $\mathbf{r}$, $j_l(x)$ — сферическая функция Бесселя.

Если полярную ось направить по вектору $\mathbf{k}$, то эта формула принимает более простой вид:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta), \tag{Д9.2}$$

где $z = r\cos\theta$.

10. Вырожденная гипергеометрическая функция. Обобщенные полиномы Лагерра

Вырожденная гипергеометрическая функция $F(a,\, c;\, z)$ определяется рядом

$$F(a,\, c;\, z) = 1 + \frac{a}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{Д10.1}$$

где a, c — константы, причем

$$c \neq -k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$z\frac{d^2F}{dz^2} + (c-z)\frac{dF}{dz} - aF(z) = 0. \tag{Д10.2}$$

Если $a = -n$ $(n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$, то $F(a,\, c;\, z)$ сводится к полиному степени n:

$$F(-n,\,c;\,z)=1-\frac{n}{c}z+\frac{n(n-1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}- \tag{Д10.3}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\,\ldots\,+(-1)^n\frac{1}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}z^n,$$

который можно представить в виде

$$F(-n,\,c;\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}L_n^{c-1}(z), \tag{Д10.4}$$

где

$$L_n^c(z)=z^{-c}e^z\frac{d^n}{dz^n}(z^{c+n}e^{-z}) \tag{Д10.5}$$

есть обобщенный полином Лагерра, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Если $a\neq -n$, то асимптотика вырожденной гипергеометрической функции имеет вид

$$F(a,\,c;\,z)\approx\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{a-c}e^z\quad\text{при } z\to\infty. \tag{Д10.6}$$

Если $c\neq -k$ $(k=0,\,1,\,2,\,3,\ldots)$, то второе линейно независимое решение уравнения (Д10.2) есть

$$F_1(z)=z^{1-c}F(a-c+1,\,2-c;\,z). \tag{Д10.7}$$

Обобщенные полиномы Лагерра удовлетворяют следующему условию ортонормированности:

$$\int\limits_0^\infty L_m^c(z)L_n^c(z)e^{-z}z^c\,dz=n!\Gamma(n+c+1)\delta_{mn}. \tag{Д10.8}$$

Часто оказывается полезным значение интеграла

$$\int\limits_0^\infty(L_{\lambda-\mu}^{\mu}(z))^2e^{-z}z^{\mu+\sigma}\,dz=$$
$$=(-1)^\sigma\frac{\lambda!\sigma!}{(\lambda-\mu)!}\sum_{\beta=0}^{\sigma}(-1)^\beta\binom{\sigma}{\beta}\binom{\lambda+\beta}{\sigma}\binom{\lambda+\beta-\mu}{\sigma}, \tag{Д10.9}$$

где $\sigma\geqslant 0$, $\binom{\sigma}{\beta}$ — число сочетаний из σ по β.

11. Коэффициенты векторного сложения

Коэффициенты векторного сложения, или коэффициенты Клебша–Гордана, обладают следующими важными свойствами:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | jm \rangle, \qquad \text{(Д11.1)}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1 -m_1,\, j_2 -m_2 | j,\, -m \rangle, \qquad \text{(Д11.2)}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \langle j,\, -m,\, j_2 m_2 | j_1,\, -m_1 \rangle, \qquad \text{(Д11.3)}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle j_1 m_1 j,\, -m | j_2,\, -m_2 \rangle. \qquad \text{(Д11.4)}$$

Коэффициенты векторного сложения произвольного момента j_1 с моментом $j_2 = \dfrac{1}{2}$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\langle j_1 m_1 \tfrac{1}{2} m_2 | jm \rangle = \qquad \text{(Д11.5)}$$

=

j \ m_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\dfrac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}}$

Коэффициенты векторного сложения произвольного момента j_1 с моментом $j_2 = 1$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\langle j_1 m_1 1 m_2 | jm \rangle = \tag{Д11.6}$$

$j \backslash m_2$	1	0	-1
j_1+1	$\sqrt{\dfrac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\dfrac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\dfrac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
j_1-1	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$-\sqrt{\dfrac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)}}$

12. Матрицы конечных поворотов

Приведем некоторые важные свойства D-функций, не отмеченные в § 55.

1) $D^{(j)}_{mm'}(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = (-1)^{m-m'} D^{(j)*}_{-m,\,-m'}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$. (Д12.1)

2) Если $j = l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, то

$$D^{(l)}_{0m}(\alpha,\, \beta,\, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta,\, \alpha), \tag{Д12.2}$$

$$D^{(l)}_{m0}(0,\, \beta,\, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta,\, \gamma), \tag{Д12.3}$$

$$D^{(l)}_{00}(0,\, \beta,\, 0) = P_l(\cos\beta). \tag{Д12.4}$$

Мы видим, что в частном случае D-функции сводятся к сферическим функциям. Поэтому их называют иногда *обобщенными сферическими функциями.*

3) С помощью коэффициентов векторного сложения (см. § 41) произведение D-функций всегда можно представить в виде их

линейной комбинации:

$$D^{(j_1)}_{m_1 m'_1}(\omega) D^{(j_2)}_{m_2 m'_2}(\omega) = \\ = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle D^{(j)}_{mm'}(\omega) \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | jm' \rangle, \quad \text{(Д12.5)}$$

где $m = m_1 + m_2$, $m' = m'_1 + m'_2$. Это соотношение называют «теоремой сложения» D-функций.

4) Соотношение, обратное (Д12.5), имеет вид

$$D^{(j)}_{mm'}(\omega) = \sum_{m_1 m'_1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle D^{(j_1)}_{m_1 m'_1}(\omega) D^{(j_2)}_{m_2 m'_2} \times \\ \times \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | jm' \rangle, \quad \text{(Д12.6)}$$

где $m_2 = m - m_1$, $m'_2 = m' - m'_1$.

С помощью этой формулы можно из D-функций некоторого порядка «строить» D-функции более высокого порядка. Так, например, положив $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ и используя (55.8) и (55.10), можно построить матрицу $\widehat{D}^{(1)}$. Затем из $\widehat{D}^{(1)}$ и $\widehat{D}^{(\frac{1}{2})}$ можно построить $\widehat{D}^{(\frac{3}{2})}$ и т. д. Таким образом, формула (Д12.6) позволяет вычислить D-функции произвольного порядка, исходя из $\widehat{D}^{(1/2)}$.

5) D-функции удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\, \partial\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D^{(j_1)^*}_{m_1 m'_1}(\alpha,\, \beta,\, \gamma) D^{(j_2)}_{m_2 m'_2}(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = \\ = \frac{8\pi^2}{2j_1+1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2}. \quad \text{(Д12.7)}$$

6) Из (Д12.7) и (Д12.5) следует

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D^{(j)^*}_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) D^{(j_1)}_{m_1 m'_1}(\alpha, \beta, \gamma) D^{(j_2)}_{m_2 m'_2}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ = \frac{8\pi^2}{2j_1+1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | jm' \rangle. \quad \text{(Д12.8)}$$

7) Используя (Д12.6), легко получить:

$$\widehat{d}^{(1)}_{mm'}(\beta) = \tag{Д12.9}$$

=

$m \backslash m'$	1	0	-1
1	$\dfrac{1+\cos\beta}{2}$	$\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1-\cos\beta}{2}$
0	$-\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\cos\beta$	$\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$
-1	$\dfrac{1-\cos\beta}{2}$	$-\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1+\cos\beta}{2}$

$$\widehat{d}^{(3/2)}_{mm'}(\beta) = \tag{Д12.10}$$

(см. следующую страницу)

$m \backslash m'$	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$
$3/2$	$\frac{1+\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\frac{1-\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$\frac{1-\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$
$1/2$	$-\sqrt{3}\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\frac{3\cos\beta-1}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$\frac{1+3\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\frac{1-\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$
$-1/2$	$\sqrt{3}\frac{1-\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$-\frac{1+3\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\frac{3\cos\beta-1}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$
$-3/2$	$-\frac{1-\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\frac{1-\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$	$-\sqrt{3}\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\frac{1+\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$