Глава 1

Алгебры Ли

Из дидактических соображений мы предпочитаем начать с рассмотрения алгебр Ли, прежде чем перейти к топологическим понятиям и группам Ли. Теория алгебр Ли стала самостоятельным разделом математики.

§ 1. Основные понятия и общие свойства

А. *Алгебры Ли*

Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем K вещественных или комплексных чисел. Векторное пространство L называется *алгеброй Ли над* K, если в L задано правило композиции $(X, Y) \to [X, Y]$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z] \quad \text{для } \alpha, \beta \in K \text{ (линейность)}, \tag{1}$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad \text{для всех } X, Y \in L \text{ (антисимметричность)}, \tag{2}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{для всех } X, Y, Z \in L. \tag{3}$$

Третья аксиома является тождеством Якоби (или ассоциативностью Якоби). Операция $[\ ,\ ]$ называется *умножением Ли*. Из аксиомы (3) следует, что это умножение Ли, вообще говоря, неассоциативно. Если K — поле вещественных (комплексных) чисел, то L называется *вещественной* (*комплексной*) *алгеброй Ли*. Алгебру Ли называют *абелевой*, или *коммутативной*, если $[X, Y] = 0$ для любых $X, Y \in L$.

Рассмотрим два подмножества M и N векторов из алгебры Ли L и обозначим через $[M, N]$ линейную оболочку всех векторов вида $[X, Y]$, $X \in M$, $Y \in N$. Если M и N — линейные подпространства алгебры Ли, то имеют место следующие соотношения:

$$[M_1 + M_2, N] \subset [M_1, N] + [M_2, N], \tag{4а}$$

$$[M, N] = [N, M], \tag{4б}$$

$$[L, [M, N]] \subset [M, [N, L]] + [N, [L, M]]. \tag{4в}$$

Эти соотношения легко могут быть проверены с помощью аксиом (1)—(3). Подпространство N алгебры L является *подалгеброй*, если $[N, N] \subset N$, и *идеалом*, если $[L, N] \subset N$. Ясно, что идеал автоматически является подалгеброй. *Максимальный идеал* N, удовлетворяющий условию $[L, N] = 0$, называется *центром* алгебры L, а поскольку $[N, N] = 0$, то центр всегда коммутативен.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в нашем векторном пространстве L. Тогда в силу линейности коммутатор $Z = [X, Y]$, выраженный через координаты (т. е. $X = x^i e_i$ и т. д.), приобретает вид [1])

$$z^i = [X, Y]^i = c^i_{jk} x^j y^k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

с $[e_j, e_k] = c^i_{jk} e_i$. Числа c^i_{jk} называются *структурными константами*, а n — *размерностью* алгебры Ли L. Из аксиом (2) и (3) следует, что структурные константы c^i_{jk} удовлетворяют условиям

$$c^i_{jk} = -c^i_{kj}, \tag{6}$$

$$c^p_{is} c^s_{jk} + c^p_{js} c^s_{ki} + c^p_{ks} c^s_{ij} = 0. \tag{7}$$

Существование подалгебр и идеалов алгебры Ли L выражается в некоторых вполне определенных ограничениях на структурные константы. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базисные элементы подалгебры, то структурные константы должны удовлетворять соотношениям

$$c^s_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i, j \leqslant k, \quad s > k, \tag{8}$$

если же они являются базисными элементами идеала, то

$$c^s_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant k, \quad s > k \text{ и произвольном } j. \tag{9}$$

Несмотря на свое название, структурные константы не являются постоянными. Действительно, из определения (5) следует, что при замене базиса в алгебре L c^k_{ij} преобразуются как тензор третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами.

Пример 1. Пусть L — множество всех косоэрмитовых бесследовых 2×2-матриц. Очевидно, что L имеет (вещественную) размерность три. Выберем в L базис

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

и определим коммутатор $[X, Y]$ в L следующим образом:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in L. \tag{10}$$

[1]) Всюду подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Легко проверить, что этот коммутатор удовлетворяет аксиомам (1)—(3) для умножения Ли. Используя (10), находим, что e_i удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_i, e_k] = \varepsilon_{ikl} e_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3,$$

где ε_{ikl} — полностью антисимметричный тензор в R^3. Элементами в L являются линейные комбинации e_i с вещественными коэффициентами. Матрицы $\sigma_k = 2ie_k$ называются матрицами Паули и удовлетворяют соотношениям $[\sigma_i, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l$.

Следовательно, L — трехмерная вещественная алгебра Ли со структурными константами c_{ik}^{l}, заданными в виде

$$c_{ikl} = \varepsilon_{ikl}.$$

Определенная таким образом алгебра L обозначается символом su (2) (или o (3)) в соответствии с классификацией алгебр Ли, которая рассматривается в § 4 и 5.

Замечание. Если A — произвольная конечномерная ассоциативная алгебра с законом умножения $(X, Y) \to X \cdot Y$, то алгебру Ли можно получить, представляя правило композиции Ли $[X, Y]$ в виде $(X \cdot Y - Y \cdot X)$ (см. также теорему Адо в § 2).

Пример 2. Пусть L — векторное пространство всех вещественных $n \times n$-матриц $\{x_{ik}\}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, над полем R вещественных чисел. Это векторное пространство L с умножением Ли (10) также является вещественной алгеброй Ли. Оно является полной линейной вещественной алгеброй Ли, обозначаемой символом gl (n, R).

Подмножество M, состоящее из всех кососимметрических матриц X, удовлетворяющих равенству $X^T = -X$, также замкнуто относительно умножения Ли (10). Поэтому M является подалгеброй, обозначаемой символом o (n). Для подмножества N матриц вида λI, кратных единичной матрице, выполняется соотношение

$$[\mathrm{gl}\,(n, R), N] = 0.$$

Следовательно, N является одномерной подалгеброй, содержащейся в центре алгебры gl (n, R).

В gl (n, R) можно ввести так называемый *базис Вейля*, выбирая в качестве базисных элементов e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $n \times n$-матрицы вида

$$(e_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}, \tag{11}$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Из (11) и (12) можно немедленно получить структурные константы:

$$c^{ij}_{sm,\,kr} = \delta^i_s \delta_{mk} \delta^j_r - \delta^i_k \delta_{rs} \delta^j_m. \tag{13}$$

Базисные векторы $\tilde{e}_{ik}$ подалгебры $o(n)$ могут быть выбраны в виде

$$\tilde{e}_{ik} = e_{ik} - e_{ki}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{14}$$

Комплексным расширением V_c вещественного векторного пространства V является комплексное векторное пространство, состоящее из всех элементов z вида $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in V$. Умножение элемента $z \in V_c$ на комплексное число $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta \in C$ определяется по формуле

$$\gamma z = \alpha x - \beta y + \mathrm{i}(\alpha y + \beta x).$$

Комплексное расширение L^c вещественной алгебры Ли L — это комплексная алгебра Ли, удовлетворяющая следующим условиям:

1) L^c является комплексным расширением вещественного векторного пространства L;
2) умножением Ли в L^c является

$$Z = [Z_1,\ Z_2] = [X_1 + \mathrm{i}Y_1,\ X_2 + \mathrm{i}Y_2] =$$
$$= [X_1,\ X_2] - [Y_1,\ Y_2] + \mathrm{i}[X_1,\ Y_2] + \mathrm{i}[Y_1,\ X_2] \equiv X + \mathrm{i}Y. \tag{15}$$

Комплексную алгебру Ли L размерности n с базисом $\{e_i\}_1^n$ можно также рассматривать как вещественную алгебру Ли размерности $2n$ с базисными векторами e_1, $\mathrm{i}e_1$, ..., e_n, $\mathrm{i}e_n$. Определенную таким образом вещественную алгебру Ли будем обозначать символом L^R. И наоборот, вещественная форма L^r комплексной алгебры Ли L^c — это вещественная алгебра Ли, комплексным расширением которой является L^c.

Алгебры A_n, B_n, C_n и D_n

Комплексным расширением алгебры $\mathrm{gl}(n, R)$ является множество всех комплексных $n \times n$-матриц с умножением Ли (10). Оно называется *полной комплексной линейной алгеброй Ли* и обозначается $\mathrm{gl}(n, C)$. Подмножество всех комплексных $n \times n$-матриц с нулевым следом является подалгеброй в $\mathrm{gl}(n, C)$ и обозначается $\mathrm{sl}(n, C)$ или A_{n-1}.

Другие последовательности комплексных алгебр связываются с различными билинейными формами. Пусть $\Phi(\xi, \eta)$ — билинейная форма, определенная в m-мерном комплексном векторном пространстве V^m. Линейные преобразования X, действующие в V^m и удовлетворяющие условию

$$\Phi(X\xi,\ \eta) + \Phi(\xi,\ X\eta) = 0, \quad \xi,\ \eta \in V^m,$$

генерируют линейную алгебру Ли L. Действительно, если последнее соотношение справедливо для X и Y, то

$$\Phi([X, Y]\xi, \eta) = \Phi(XY\xi, \eta) - \Phi(YX\xi, \eta) = -\Phi(\xi, [X, Y]\eta),$$

где умножение Ли для X и Y определено в виде $[X, Y] = XY - YX$.

Если билинейная форма $\Phi(\xi, \eta)$ невырождена [1]) и симметрическая (например, $\Phi \equiv \xi_i\eta_i$), то L называется *ортогональной алгеброй Ли*. При $m = 2n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность соответствующих алгебр обозначается $o(2n + 1, C)$ или B_n, а при $m = 2n$ — обозначается $o(2n, C)$ или D_n.

Алгебры, связанные с невырожденными кососимметрическими билинейными формами, называются *симплектическими алгебрами Ли*. Из элементарной алгебры известно, что кососимметрические формы в нечетномерных пространствах всегда вырождены ($\det = 0$). Поэтому симплектические алгебры могут быть реализованы только в четномерных комплексных пространствах V^{2n} и обозначаются $sp(n, C)$ или C_n.

Алгебры A_n, B_n, C_n и D_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют совокупность классических комплексных алгебр Ли.

Прямые суммы алгебр и фактор-алгебры

Пусть V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — подпространства векторного пространства V, и пусть

$$D = \sum_{i=1}^{k} V_i \tag{16}$$

есть совокупность всех векторов вида

$$d = \sum_{i=1}^{k} v_i, \quad v_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{17}$$

Если каждый вектор $d \in D$ единственным образом представляется в виде (17), то мы говорим, что D является *прямой суммой* подпространств V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и записываем

$$D = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k = \sum_{i=1}^{k} \dotplus V_i. \tag{18}$$

Если алгебру Ли L как векторное пространство можно записать через прямую сумму в виде (18), т. е. $L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_k$, и, кроме того, если

$$[L_i, L_i] \subset L_i, \quad [L_i, L_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \tag{19}$$

[1]) Билинейная форма $\Phi(\xi, \eta)$ невырождена, если для всякого $\xi_0 \in V^m$ линейная форма $\Phi(\xi_0, \eta)$ не равна тождественно нулю по η. В координатной форме $\Phi(\xi, \eta) = \xi^i a_{ij}\eta^j$ невырождена тогда и только тогда, когда ее матрица $[a_{ij}]$ невырождена, т. е. $\det a_{ij} \neq 0$.

то об L говорят, что она *разлагается* в прямую сумму алгебр Ли $L_1, L_2, \ldots, L_k$ и обозначают ее $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Ясно, что подалгебры L_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — идеалы в L, поскольку

$$[L, L_i] = [L_i, L_i] \subset L_i. \tag{20}$$

Более того, если N — идеал в подалгебре L_i, то N также идеал в алгебре L.

Пусть N — подалгебра некоторой алгебры Ли L. Введем в пространстве L отношение

$$X \simeq Y \pmod N \tag{21}$$

при $X - Y \in N$, т. е. вектор X является суммой вектора Y и вектора n из N. Это отношение удовлетворяет свойствам

1° $X \simeq X$,

2° если $X \simeq Y$, то $Y \simeq X$,

3° если $X \simeq Y$, а $Y \simeq Z$, то $X \simeq Z$

и, следовательно, является отношением эквивалентности. Вся алгебра L разлагается в непересекающиеся классы $K_x = X + N$ эквивалентных элементов. Множество $\{K_x\}$ всех классов в общем случае не образует алгебры Ли: в самом деле, если

$$X_1 \simeq Y_1 \pmod N, \quad \text{т. е.} \quad X_1 = Y_1 + n_1,$$
$$X_2 \simeq Y_2 \pmod N, \quad \text{т. е.} \quad X_2 = Y_2 + n_2,$$

то

$$[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] + [Y_1, n_2] + [n_1, Y_2] + [n_1, n_2]. \tag{22}$$

Поэтому в общем случае соотношение

$$[X_1, X_2] \simeq [Y_1, Y_2] \pmod N \tag{22а}$$

не выполняется. Однако если подалгебра N, кроме того, является идеалом, то последние три члена в (22) содержатся в N и условие (22а) удовлетворяется. Полученная алгебра Ли называется *факторалгеброй Ли* алгебры L по отношению к N и обозначается L/N.

Пример 3. Пусть P — алгебра Пуанкаре с коммутационными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}, \\ M_{\mu\nu} &= -M_{\nu\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{23а}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu, \tag{23б}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{23в}$$

где $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ и $g_{\mu\nu} = 0$ для $\mu \neq \nu$.

Множество t^4 линейных комбинаций P_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3$ (генераторов трансляций), является идеалом в P. Если ввести отношение эквивалентности

$$X \simeq Y \,(\mathrm{mod}\, t^4), \quad X, Y \in P,$$

то множество классов $K_x = X + t^4$, $X \in P$, эквивалентных элементов образует шестимерную (фактор-) алгебру Ли, изоморфную алгебре Лоренца so (3, 1) с генераторами $M_{\mu\nu}$ из (23а). С другой стороны, отношение эквивалентности

$$X \simeq Y \,(\mathrm{mod}\, \mathrm{so}(3, 1)), \quad X, Y \in P,$$

определяет четырехмерное векторное фактор-пространство (но не фактор-алгебру Ли).

Б. *Операции над алгебрами Ли*

Рассмотрим теперь свойства различных операций, определенных над алгебрами Ли. Пусть L и L' — две произвольные алгебры Ли над множеством вещественных или комплексных чисел, и пусть φ — отображение L в L'. Отображение φ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\varphi(X) + \beta\varphi(Y), \quad X, Y \in L, \quad \alpha, \beta \in K, \tag{24а}$$

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad X, Y \in L. \tag{24б}$$

Множество

$$N = \{X \in L : \varphi(X) = 0\}$$

называется *ядром* гомоморфизма φ. Оно есть идеал в L. Действительно, если $X \in L$ и $Y \in N$, то

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), 0] = 0,$$

т. е. $[X, Y] \in N$. Нетрудно проверить, что L/N изоморфно $\varphi(L)$.

Пусть N — идеал в алгебре Ли L. Отображение

$$\varphi: X \to X + N$$

называется *естественным гомоморфизмом* L *на* L/N. Взаимно однозначный гомоморфизм одной алгебры на другую называется *изоморфизмом*, а соответствующие алгебры L и L' — *изоморфными*: в этом случае будем писать $L \sim L'$. Изоморфное отображение L на себя называется *автоморфизмом*. Автоморфизм φ алгебры Ли L называется *инволютивным*, если $\varphi^2 = I$.

Отображение σ комплексной алгебры Ли в себя, удовлетворяющее условиям

$$\sigma(\lambda X + \mu Y) = \bar{\lambda}\sigma(X) + \bar{\mu}\sigma(Y), \quad \sigma([X, Y]) = \\ = [\sigma(X), \sigma(Y)], \quad \sigma^2 = I, \tag{25}$$

называется *сопряжением*. Например, если L^c — комплексное расширение вещественной алгебры Ли L, то отображение

$$\sigma: X + iY \to X - iY, \quad X, Y \in L,$$

задает сопряжение в L^c. Заметим, что сопряжение σ не является автоморфизмом в L, так как оно антилинейно.

Дифференцирование [1]) D алгебры Ли L — это линейное отображение L в себя, удовлетворяющее

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \quad X, Y \in L. \tag{26}$$

Очевидно, что если D_1 и D_2 — два дифференцирования в L, то $\alpha D_1 + \beta D_2$ также является дифференцированием. Более того, если D_1 и D_2 — дифференцирования, то

$$D_1 D_2([X, Y]) = D_1\{[D_2 X, Y] + [X, D_2 Y]\} =$$
$$= [D_1 D_2 X, Y] + [D_2 X, D_1 Y] + [D_1 X, D_2 Y] + [X, D_1 D_2 Y].$$

Меняя местами индексы 1 и 2 и вычитая, получаем

$$[D_1, D_2]([X, Y]) = [[D_1, D_2] X, Y] + [X, [D_1, D_2] Y], \tag{27}$$

т. е. коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием. Поэтому множество L_A всех дифференцирований самообразует алгебру Ли, *алгебру дифференцирований* L_A. Интересно заметить, что алгебра L_A является алгеброй Ли группы всех автоморфизмов G_A исходной алгебры L. В самом деле, если $\varphi_t = \exp(tAt)$ — однопараметрическая группа автоморфизмов L, т. е.

$$\varphi_t([X, Y]) = [\varphi_t(X), \varphi_t(Y)] \in L, \quad X, Y \in L, \tag{28}$$

то дифференцирование по t дает при $t = 0$

$$A([X, Y]) = [AX, Y] + [X, AY],$$

т. е. генератор A однопараметрической подгруппы $\varphi(t)$ автоморфизмов является дифференцированием. Обратно, можно также показать, что если A удовлетворяет равенству (26), то соответствующая однопараметрическая подгруппа удовлетворяет (28) (см. упражнение 1.8).

Пусть L — алгебра Ли над вещественными числами R или комплексными числами C. Рассмотрим линейное отображение $\operatorname{ad} X$ алгебры L в себя, определенное при помощи

$$\operatorname{ad} X(Y) \equiv [X, Y], \quad X, Y \in L. \tag{29}$$

Воспользовавшись тождеством Якоби (3), получаем

$$\operatorname{ad} X([Y, Z]) = [\operatorname{ad} X(Y), Z] + [Y, \operatorname{ad} X(Z)], \tag{30}$$

т. е. отображение $\operatorname{ad} X$ является дифференцированием L. Более того, используя (29) и тождество Якоби, мы получаем

$$\operatorname{ad}[X, Y](Z) = [\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y](Z). \tag{31}$$

---

[1]) В более ранних публикациях называемое также *инфинитезимальным автоморфизмом* алгебры L.

Таким образом, множество $L_a = \{\mathrm{ad}\, X,\ X \in L\}$ является линейной алгеброй Ли, подалгеброй алгебры Ли L_A всех дифференцирований, и называется *присоединенной алгеброй*. Отображение $\psi : X \to \mathrm{ad}\, X$ есть гомоморфизм алгебры L на L_a. Понятно, что ядро гомоморфизма ψ является центром в L.

Более того, алгебра Ли L_a является идеалом алгебры Ли L_A всех дифференцирований. В самом деле, при $D \in L_A$ и $Y \in L$ мы имеем

$$[D,\ \mathrm{ad}\, X](Y) = D[X,\ Y] - [X,\ DY] = [DX,\ Y] = \mathrm{ad}\, DX(Y), \quad (32)$$

т. е.

$$[D,\ \mathrm{ad}\, X] \in L_a.$$

Наконец, заметим, что если φ — произвольный автоморфизм L, то в силу (29) и (24б) мы имеем

$$\mathrm{ad}\, \varphi(X)(Y) = [\varphi(X),\ Y] = \varphi([X,\ \varphi^{-1}Y]) = \varphi\{\mathrm{ad}\, X[\varphi^{-1}(Y)]\},$$

т. е.

$$\mathrm{ad}\, \varphi(X) = \varphi\, \mathrm{ad}\, X \varphi^{-1}. \quad (33)$$

Относительно групп G_A (G_a) всех (внутренних) автоморфизмов L и их алгебр Ли мы отсылаем читателя также к гл. 3, § 3.

Пример 4. Возвращаясь к трехмерной алгебре Ли примера 1, мы видим, что $\mathrm{ad}\, e_1(e_1) = 0$, $\mathrm{ad}\, e_1(e_2) = e_3$, $\mathrm{ad}\, e_1(e_3) = -e_2$ и т. п. Следовательно, L_a снова является трехмерной алгеброй Ли и может быть представлена в базисе $\{e_i\}$ посредством матриц

$$\mathrm{ad}\, e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}\, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}\, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. L_a является множеством трехмерных кососимметрических матриц, или o (3).

Аналогично присоединенная алгебра для gl (n, R) примера 2 задается соотношениями $\mathrm{ad}\, e_{ij}(e_{kl}) = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$ (размерность n^2), а для o (n) — множеством $n(n-1)/2$-мерных кососимметрических матриц.

Введем теперь важное понятие *полупрямой суммы* двух алгебр Ли. Пусть T и M — две алгебры Ли, и пусть D — гомоморфизм M в множество линейных операторов в векторном пространстве T, таких, что каждый оператор $D(X)$, $X \in M$, является дифференцированием алгебры T. Снабдим прямую сумму векторных пространств $T \dot{+} M$ структурой алгебры Ли, используя заданные скобки Ли алгебр T и M в каждом подпространстве, а в качестве скобок Ли между двумя подпространствами полагая

$$[X,\ Y] = (D(X))(Y) \quad \text{для } X \in M, \quad Y \in T. \quad (34)$$

Очевидно, что все аксиомы (1)—(3) алгебры Ли удовлетворяются; в частности, ввиду (34) для $X \in M$, $Y_i \in T$ мы имеем

$$[X, [Y_1, Y_2]] + [Y_2, [X, Y_1]] + [Y_1, [Y_2, X]] = \\ = D(X)([Y_1, Y_2]) - [D(X)Y_1, Y_2] - [Y_1, D(X)Y_2],$$

что равно нулю, поскольку $D(X)$ является дифференцированием. Полученная таким образом алгебра Ли называется *полупрямой суммой* T и M. Подалгебра T ввиду (34) является идеалом полупрямой суммы. Другими словами, алгебра Ли L есть полупрямая сумма подалгебр T и M, если $L = T \dotplus M$, и

$$[T, T] \subset T, \quad [M, M] \subset M, \quad [M, T] \subset T. \tag{35}$$

Для полупрямой суммы мы будем использовать символ $T \ni M$, записывая на первом месте идеал T, а на втором подалгебру M.

Пример 5. Алгебра Пуанкаре примера 3 является полупрямой суммой идеала t^4 и алгебры Лоренца so (3, 1) с

$$D(M_{\mu\nu})(P_\sigma) = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu,$$

т. е.

$$P = t^4 \ni \mathrm{so}(3, 1). \tag{36}$$

В. *Представления алгебр Ли*

Пусть L — алгебра Ли над полем K, а H — линейное пространство. *Представление* алгебры L в H — это гомоморфизм $X \to T(X)$ алгебры L в множество линейных операторов в H, т. е. для X, Y из L и α, β из K мы имеем

$$\alpha X + \beta Y \to \alpha T(X) + \beta T(Y), \tag{37}$$

$$[X, Y] \to [T(X), T(Y)] \equiv T(X)T(Y) - T(Y)T(X). \tag{38}$$

Заметим, что ввиду (38) тождество Якоби (3) удовлетворяется автоматически.

Если пространство представления H бесконечномерно, то дополнительно предполагается, что операторы $T(X)$ для всех $X \in L$ имеют общую инвариантную линейную область определения D, плотную в H. (Явное построение области определения D см. в гл. 11, § 1.)

Пример 6. Пусть L — произвольная алгебра Ли с коммутационными соотношениями

$$[X_l, X_k] = c^j_{lk}X_j, \quad l, k, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где структурные константы c^j_{lk} взяты вещественными.

Тогда отображение

$$X_l \to T(X_l) = C_l \equiv \{-c^j_{lk}\} \tag{39}$$

алгебры L в $n \times n$-матрицы в R^n задает конечномерное представление L. Действительно, в силу (6) и (7) мы имеем

$$[T(X_i), T(X_j)] = C_iC_j - C_jC_i = c_{ij}^s T(X_s). \tag{40}$$

Представление $X \to T(X)$ алгебры Ли L, заданное согласно (39), называется *присоединенным представлением* алгебры L.

Пример 7. Пусть L — алгебра Ли, определенная следующим набором коммутационных соотношений:

$$[P_l, Q_k] = \frac{1}{i}\delta_{lk}Z, \quad [P_l, Z] = 0 = [Q_k, Z], \quad l, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Пусть $H = L^2(R^n)$ и $D = C_0^\infty(R^n)$. Тогда отображение

$$Q_l \to x_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$P_k \to \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad Z \to I \tag{42}$$

задает представление алгебры L в пространстве H с D в качестве общей линейной инвариантной области определения, плотной в H.

§ 2. Разрешимые, нильпотентные, полупростые и простые алгебры Ли

А. *Теорема Адо*

Одной из центральных задач в теории алгебр Ли является нахождение и классификация всех неизоморфных алгебр Ли. В § 1, А мы видели, что матричные алгебры A_n, B_n, C_n и D_n образуют большие классы алгебр Ли. Поэтому можно предположить, что матричные алгебры исчерпывают все возможные алгебры Ли. Это справедливо на самом деле в силу следующего фундаментального результата.

Теорема 1. *Всякая алгебра Ли над полем комплексных чисел C изоморфна некоторой матричной алгебре* [1]) (доказательство см. в работе [4]).

Эта теорема справедлива и для вещественных алгебр Ли. Действительно, если L — вещественная алгебра Ли, то по теореме 1 ее комплексное расширение L^c является матричной алгеброй Ли; следовательно, вещественное сужение L^c до L также является матричной алгеброй Ли.

Фактически теорема Адо утверждает, что всякую абстрактную алгебру Ли можно рассматривать как подалгебру полной линейной алгебры Ли $gl(n, C)$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому задача классификации всех неизоморфных абстрактных алгебр Ли может быть

[1]) Для групп Ли соответствующая теорема справедлива локально, но не глобально (см. [122]).