алгебры L в $n \times n$-матрицы в R^n задает конечномерное представление L. Действительно, в силу (6) и (7) мы имеем

$$[T(X_i), T(X_j)] = C_iC_j - C_jC_i = c_{ij}^s T(X_s). \tag{40}$$

Представление $X \to T(X)$ алгебры Ли L, заданное согласно (39), называется *присоединенным представлением* алгебры L.

Пример 7. Пусть L — алгебра Ли, определенная следующим набором коммутационных соотношений:

$$[P_l, Q_k] = \frac{1}{i}\delta_{lk}Z, \quad [P_l, Z] = 0 = [Q_k, Z], \quad l, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Пусть $H = L^2(R^n)$ и $D = C_0^\infty(R^n)$. Тогда отображение

$$Q_l \to x_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$P_k \to \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad Z \to I \tag{42}$$

задает представление алгебры L в пространстве H с D в качестве общей линейной инвариантной области определения, плотной в H.

§ 2. Разрешимые, нильпотентные, полупростые и простые алгебры Ли

А. *Теорема Адо*

Одной из центральных задач в теории алгебр Ли является нахождение и классификация всех неизоморфных алгебр Ли. В § 1, А мы видели, что матричные алгебры A_n, B_n, C_n и D_n образуют большие классы алгебр Ли. Поэтому можно предположить, что матричные алгебры исчерпывают все возможные алгебры Ли. Это справедливо на самом деле в силу следующего фундаментального результата.

Теорема 1. *Всякая алгебра Ли над полем комплексных чисел C изоморфна некоторой матричной алгебре* [1]) (доказательство см. в работе [4]).

Эта теорема справедлива и для вещественных алгебр Ли. Действительно, если L — вещественная алгебра Ли, то по теореме 1 ее комплексное расширение L^c является матричной алгеброй Ли; следовательно, вещественное сужение L^c до L также является матричной алгеброй Ли.

Фактически теорема Адо утверждает, что всякую абстрактную алгебру Ли можно рассматривать как подалгебру полной линейной алгебры Ли $gl(n, C)$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому задача классификации всех неизоморфных абстрактных алгебр Ли может быть

[1]) Для групп Ли соответствующая теорема справедлива локально, но не глобально (см. [122]).

сведена к более простой задаче перечисления всех неизоморфных линейных подалгебр Ли алгебры $\mathrm{gl}(n, C)$.

Рассмотрим теперь наиболее важные классы алгебр Ли.

Б. *Разрешимые и нильпотентные алгебры*

Пусть N — идеал алгебры L, тогда $[N, N]$ — также идеал в L. Действительно, согласно (1.4в) имеем

$$[L, [N, N]] \subset [N, [N, L]] + [N, [L, N]] \subset [N, N]. \qquad (1)$$

В частности, L — идеал в L, поэтому $[L, L]$ также есть идеал, который может быть меньше чем L. При этом может случиться, что последовательность идеалов

$$L^0 = L, \quad L^{(1)} = [L^0, L^0], \ \ldots, \quad L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

обрывается, т. е. $L^{(n)} = 0$ для некоторого n.

Определение 1. Алгебра Ли L называется *разрешимой*, если для некоторого положительного целого n $L^{(n)} = 0$.

Пример 1. Рассмотрим алгебру Ли $e(2)$ группы движений вещественной двумерной плоскости, состоящей из двумерных трансляций и вращений вокруг оси, перпендикулярной к плоскости. Генераторы этой группы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_2] = X_1.$$

Мы видим, что

$L^{(1)} = t^2$ (алгебра Ли с базисными элементами X_1 и X_2),

$L^{(2)} = 0$.

Следовательно, $e(2)$ разрешима.

Свойство разрешимости алгебры Ли наследственно в том смысле, что каждая подалгебра L_s также разрешима. В самом деле,

$$L_s^{(1)} = [L_s^{(0)}, L_s^{(0)}]$$

является идеалом в L_s, удовлетворяющим $L_s^{(1)} \subset L^{(1)}$. Значит, $L_s^{(n)} \subset L^{(n)} = 0$, т. е. L_s — разрешимая алгебра. Очевидно также, что всякий гомоморфный образ разрешимой алгебры разрешим. Более того, если алгебра Ли L содержит разрешимый идеал N, такой, что фактор-алгебра L/N разрешима, то L также разрешима.

Всякая разрешимая алгебра содержит коммутативный идеал. Действительно, если $L^{(n)} = 0$, а $L^{(n-1)} \neq 0$, то $L^{(n-1)}$ — идеал в L и $[L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] = 0$.

Введем следующую последовательность идеалов:

$$L_{(0)} = L, \quad L_{(1)} = [L_{(0)}, L], \ \ldots, \quad L_{(n+1)} = [L_{(n)}, L]. \qquad (3)$$

Определение 2. Алгебра Ли называется *нильпотентной*, если для некоторого положительного целого n $L_{(n)} = 0$.

При помощи индукции легко проверить, что $L^{(n)} \subset L_{(n)}$. В самом деле, $L^{(0)} = L_{(0)}$, и если $L^{(n)} \subset L_{(n)}$, то

$$L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] \subset [L_{(n)}, L] \subset L_{(n+1)}.$$

Таким образом, нильпотентная алгебра является разрешимой. Обратное не верно: например, двумерная некоммутативная алгебра Ли, определяемая коммутационным соотношением

$$[X, Y] = X,$$

разрешима, но не нильпотентна. Аналогично алгебра Ли e(2) из рассмотренного выше примера 1 разрешима, но не нильпотентна.

Как видно из определения, всякая подалгебра и всякий гомоморфный образ нильпотентной алгебры нильпотентны.

Всякая нильпотентная алгебра обладает нетривиальным центром. В самом деле, если $L_{(n)} = 0$, а $L_{(n-1)} \neq 0$, то ввиду (3) $[L_{(n-1)}, L] = 0$, т. е. $L_{(n-1)}$ — центр алгебры L.

Согласно теореме 1, всякая алгебра Ли изоморфна некоторой линейной подалгебре полной линейной алгебры $gl(n, C)$. Поучителен вид этих линейных матричных алгебр, соответствующий разрешимым и нильпотентным алгебрам.

Пусть $T^{(m)}$ обозначает векторное пространство всех верхних треугольных $m \times m$-матриц, а $S^{(m)}$ — векторное пространство всех верхних треугольных $m \times m$-матриц с равными диагональными элементами. Пусть $S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ обозначает множество всех линейных преобразований A, действующих в пространстве

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k$$

таким образом, что

1) $A \in S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ оставляет подпространства V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, инвариантными,
2) в каждом подпространстве V_i с базисом $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_{m_i}^{(i)}$, $A \in S^{(m_i)}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & & & a_{jk}^{(i)} \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Коммутаторы треугольных матриц являются также треугольными матрицами. Поэтому векторные пространства $T^{(m)}$ и $S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ представляют собой алгебры Ли. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Произвольная разрешимая алгебра Ли линейных преобразований изоморфна подалгебре некоторой алгебры Ли* $T^{(m)}$. *Произвольная нильпотентная линейная алгебра Ли изоморфна подалгебре некоторой алгебры Ли* $S^{(m_1, m_2, \dots, m_k)}$.

(Доказательство см. в [237], § 2).

Предыдущие утверждения относительно нильпотентных и разрешимых алгебр теперь могут быть легко проверены для треугольных матриц.

В. *Форма Киллинга*

В (1.29) мы ввели гомоморфизм $X \to \operatorname{ad} X$ при помощи соотношения

$$\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y].$$

В координатах имеем

$$(\operatorname{ad} X(Y))^i = [X, Y]^i = c^i_{lk} x^l y^k,$$

т. е.

$$(\operatorname{ad} X)^i_k = c^i_{lk} x^l. \tag{4}$$

Определим теперь *«скалярное произведение»* в алгебре Ли, полагая

$$(X, Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y). \tag{5}$$

Скалярное произведение (5) обладает следующими свойствами:

1) симметричность $(X, Y) = (Y, X)$, (6а)

2) билинейность $(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha(X, Z) + \beta(Y, Z)$ для всех $X, Y, Z \in L$ и α, β — вещественных либо комплексных чисел, (6б)

3) $(\operatorname{ad} X(Y), Z) + (Y, \operatorname{ad} X(Z)) = 0$, или $([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0$. (6в)

Эти свойства следуют непосредственно из свойств следов. Например, пусть

$$a = (\operatorname{ad} X(Y), Z) = \operatorname{Tr}\{\operatorname{ad}([X, Y]) \operatorname{ad} Z\} =$$
$$= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Z),$$
$$b = (Y, \operatorname{ad} X(Z)) = \operatorname{Tr}\{\operatorname{ad} Y(\operatorname{ad}[X, Z])\} =$$
$$= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Z) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z \operatorname{ad} X);$$

тогда из равенства $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(CAB)$ имеем $a + b = 0$, т. е. (6в).

Симметрическая бнлинейная форма (5) на $L \times L$ называется *формой Киллинга*. Выражая через координаты в некотором базисе, из (4) получаем

$$(X, Y) = \operatorname{Tr}\left((\operatorname{ad} X)^i_k (\operatorname{ad} Y)^s_i\right) = c^i_{lk} x^l c^k_{si} y^s = g_{ls} x^l y^s, \tag{7}$$

где симметрический тензор второго ранга

$$g_{ts} = c^i_{lk} c^k_{si} \tag{8}$$

называется *метрическим тензором Картана* алгебры Ли L. Заметим, что для некоторых алгебр (например, коммутативных) форма Киллинга (5) и, следовательно, метрический тензор (8) могут быть вырождены, т. е. $\det [g_{ki}] = 0$.

Для произвольного автоморфизма ψ заданной алгебры Ли L ввиду (1.33) имеем

$$\operatorname{ad} \psi(X) = \psi \operatorname{ad} X \psi^{-1}.$$

В силу этого

$$(\psi(X), \psi(Y)) = (X, Y), \tag{9}$$

т. е. форма Киллинга инвариантна относительно действия группы G_A всех автоморфизмов алгебры L.

Форма Киллинга (5) и ассоциированный с ней тензор Картана играют фундаментальную роль в теории алгебр Ли и их представлений.

Например, простой критерий разрешимости алгебр Ли через форму Киллинга дает следующая теорема.

Теорема 3. *Если $(X, X) = 0$ для всякого $X \in L$, то L — разрешимая алгебра Ли* [1]). *Если алгебра L нильпотентна, то $(X, X) = 0$ для всех $X \in L$.*

(Доказательство см. в [237], теорема V.)

Докажем теперь три полезные леммы.

Лемма 4. *Пусть через $(\ ,\ )$, $(\ ,\ )^c$ и $(\ ,\ )^R$ обозначены формы Киллинга вещественной алгебры L, ее комплексного расширения L^c и вещественной формы $(L^c)^R$ комплексного расширения L^c. Тогда*

$$(X, Y) = (X, Y)^c \quad \text{для} \quad X, Y \in L, \tag{10}$$

$$(X, Y)^R = 2\operatorname{Re}((X, Y)^c) \quad \text{для} \quad X, Y \in (L^c)^R. \tag{11}$$

Доказательство. Мы можем выбрать одинаковый базис (т. е. один и тот же набор структурных констант) для L и L^c. Тогда метрические тензоры Картана в L и L^c совпадают. Это доказывает равенство (10). Чтобы доказать (11), рассмотрим линейное преобразование A и базис $e_1, \ldots, e_n$ в L^c. Пусть $A = B + iC$ — разложение преобразования A на вещественную и мнимую части. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ алгебры L^R имеем

$$A(e_k) = Be_k + C(ie_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A(ie_k) = -Ce_k + B(ie_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

---

[1]) Заметим, что обратное неверно.

Значит, преобразование $\tilde{A}$ в L^R, индуцированное преобразованием A в L^c, имеет вид $\tilde{A} = \begin{bmatrix} B & C \\ -C & B \end{bmatrix}$. Полагая $A = \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ и воспользовавшись определением (5), получаем равенство (11).

Лемма 5. *Пусть N — идеал алгебры Ли L. Если $X, Y \in N$, то*

$$(X, Y)_N = (X, Y)_L, \tag{12}$$

т. е. значение формы Киллинга на N, взятое по отношению к N, такое же, как и по отношению к L.

Доказательство. Если $e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, \ldots, e_{\bar{r}}, e_{r+1}, \ldots, e_n$ — базис в L, такой, что $e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, \ldots, e_{\bar{r}}$, $r \leqslant n$, — базис в N (т. е. индексы с чертой относятся к идеалу N), то для $X, Y \in N$ имеем, согласно (1.9),

$$(X, Y)_L = \operatorname{Tr}_L(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y) = c^{\bar{s}}_{\bar{l}k} x^{\bar{l}} c^{\bar{k}}_{\bar{t}s} y^{\bar{t}} =$$
$$= c^{\bar{s}}_{\bar{l}\bar{k}} x^{\bar{l}} c^{\bar{k}}_{\bar{t}\bar{s}} y^{\bar{t}} = \operatorname{Tr}_N(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y) = (X, Y)_N.$$

Лемма 6. *Ортогональное дополнение (по отношению к форме Киллинга) идеала $N \subset L$ также является идеалом.*

Доказательство. Пусть $X \in N^{\perp} \equiv \{X \in L : (X, N) = 0\}$. Тогда для каждого $Y \in N$ и $Z \in L$ из (6в) имеем

$$(\operatorname{ad} Z(X), Y) = -(X, \operatorname{ad} Z(Y)) = 0.$$

Поэтому для любого Z $\operatorname{ad} Z(X) \in N^{\perp}$, т. е. $N^{\perp}$ — идеал в L.

Пример 1. Вычислим явно форму Киллинга алгебры Ли $\mathrm{sl}(n, C)$. Воспользовавшись выражением (1.13) для структурных констант алгебры $\mathrm{gl}(n, C)$, вычислим сначала метрический тензор Картана (8):

$$g_{sm,\, s'm'} = c^{ij}_{sm,\, kr} c^{kr}_{s'm',\, ij} = 2n\delta_{sm'}\delta_{ms'} - 2\delta_{sm}\delta_{s'm'}.$$

Отсюда форма Киллинга для $\mathrm{gl}(n, C)$ равна

$$(X, Y) = g_{sm,\, s'm'} x_{sm} y_{s'm'} = 2n\operatorname{Tr}(X \cdot Y) - 2\operatorname{Tr} X \operatorname{Tr} Y. \tag{13}$$

Множество $\mathrm{sl}(n, C)$ по определению состоит из элементов $\mathrm{gl}(n, C)$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Tr} X = 0$; оно является идеалом в $\mathrm{gl}(n, C)$. Поэтому, согласно лемме 5 и формуле (13), имеем

$$(X, Y)_{\mathrm{sl}(n, C)} = 2n\operatorname{Tr}(X \cdot Y), \quad X, Y \in \mathrm{sl}(n, C). \tag{14}$$

Множество $N = \{\lambda I\}$, $\lambda \in C$, также является идеалом в $\mathrm{gl}(n, C)$. Форма Киллинга (13) равна нулю, когда X или $Y \in N$. Следовательно, скалярное произведение (13) для $\mathrm{gl}(n, C)$ вырождено. В разделе Г мы увидим, что форма Киллинга всегда вырождена для алгебры Ли, содержащей ненулевой коммутативный идеал.

Подмножество в $\mathrm{sl}(n, C)$, состоящее из всех вещественных матриц, генерирует вещественную подалгебру $\mathrm{sl}(n, R)$, комплексным

расширением которой является алгебра sl (n, C). Поэтому, согласно лемме 4 и равенству (14), форма Киллинга для sl (n, R) равна

$$(X, Y)_{\mathrm{sl}(n, R)} = 2n\mathrm{Tr}(X \cdot Y), \quad X, Y \in \mathrm{sl}(n, R). \tag{15}$$

В частности, при $n = 2$ с базисом, заданным в примерах 1.1 и 1.4, находим $(e_i, e_j) = -2\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Г. *Простые и полупростые алгебры Ли*

Из множества всех алгебр Ли мы выделили класс разрешимых и нильпотентных алгебр. В этом разделе определим класс простых и полупростых алгебр Ли, играющих существенную роль в изучении структуры и классификации алгебр Ли.

Определение 3. Алгебра Ли L *полупроста*, если она не имеет ненулевых коммутативных идеалов.

Следующая теорема дает критерий полупростоты.

Теорема 7 (Картан). *Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Если алгебра L не полупроста, то она имеет коммутативный идеал N. Если $X_{\bar{1}}, X_{\bar{2}}, \ldots, X_{\bar{r}}$ — базисные элементы идеала N, то структурные константы удовлетворяют условию (1.9) (индексы с чертой относятся к идеалу N), т. е.

$$c^s_{i\bar{l}} = 0 \quad \text{для} \quad \bar{l} \leqslant r,\ s > r \text{ и } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c^{\bar{t}}_{\bar{m}\bar{l}} = 0 \quad \text{для} \quad \bar{m}, \bar{l}, \bar{t} \leqslant r.$$

Вследствие этого получаем

$$g_{i\bar{m}} = c^t_{is} c^s_{\bar{m}t} = c^t_{i\bar{s}} c^{\bar{s}}_{\bar{m}t} = c^{\bar{t}}_{i\bar{s}} c^{\bar{s}}_{\bar{m}\bar{t}} = 0.$$

За счет этих исчезающих компонент метрического тензора $\det [g_{il}]$ обращается в нуль, т. е. форма Киллинга (5) вырождена. Чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим, что ортогональное дополнение $L^\perp$ алгебры L нетривиально. Поскольку L — идеал в L, ортогональное дополнение $L^\perp$ также является идеалом L согласно лемме 6. Если $X \in L^\perp$, то $(X, X) = 0$. Значит, в силу теоремы 3 $L^\perp$ — разрешимый идеал. Следовательно, $L^\perp$ содержит нетривиальный коммутативный идеал, являющийся в то же время идеалом в L. Таким образом, приходим к противоречию, так как L полупроста и не имеет коммутативного идеала. Поэтому $L^\perp = 0$ и, следовательно, (X, Y) невырождена.

Определение 4. Алгебра Ли L *проста*, если она не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и L, и если $L^{(1)} = [L, L] \neq 0$.

В § 4 мы увидим, что классы алгебр A_n, B_n, C_n и D_n являются простыми алгебрами. Кроме них существует только пять простых алгебр.

Условие $L^{(1)} \neq 0$ исключает алгебры Ли размерности один, которые были бы простыми, но не полупростыми. Например, алгебра из примера 1.1 проста. Разрешимая алгебра L не может содержать простой подалгебры; это следует из того факта, что если L' — любая простая подалгебра, то идеал $[L', L']$ по определению 4 равен L'; таким образом, последовательность идеалов $L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$, $L^{(0)} = L$ алгебры L всегда содержала бы L' и поэтому никогда не обрывалась. Значит, если L содержит простую подалгебру, она не может быть разрешимой.

Говорят, что алгебра Ли L *компактна*, если в L существует положительно определенная квадратичная форма $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая условию [1])

$$([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0. \tag{16}$$

Все остальные алгебры Ли называются *некомпактными*. Форма Киллинга (5) удовлетворяет условию (16). Значит, если метрический тензор Картана полупростой алгебры Ли L положительно (или отрицательно) определен, то L компактна.

В комплексной алгебре Ли любая инвариантная квадратичная форма является индефинитной. Следовательно, всякая комплексная алгебра Ли некомпактна; компактная алгебра Ли является некоторой вещественной формой L^r комплексной алгебры Ли L (см. § 5). Покажем теперь, что для компактной полупростой алгебры Ли L структурные константы c^t_{rs} могут быть представлены посредством полностью антисимметричного ковариантного тензора 3 ранга; в самом деле, если с помощью метрического тензора Картана g_{tl} в L опустить индексы контравариантных тензоров, то тензор

$$c_{rsl} \equiv c^t_{rs} g_{tl} \tag{17}$$

при помощи (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} c_{rsl} &= c^t_{rs} c^n_{lm} c^m_{ln} = -c^t_{sm} c^n_{tr} c^m_{ln} - c^t_{mr} c^n_{ls} c^m_{ln} \quad \text{согласно (1.7)} \\ &= c^t_{sm} c^n_{rt} c^m_{ln} + c^t_{mr} c^n_{ts} c^m_{nl} \quad \text{согласно (1.6).} \end{aligned}$$

Последнее выражение симметрично относительно циклических перестановок индексов и антисимметрично по r, s в силу (1.6); следовательно, тензор (17) полностью антисимметричен. С другой стороны, в компактной алгебре Ли L метрический тензор Картана может быть выбран в виде $g_{tl} = \delta_{tl}$; тогда ввиду (17)

$$c_{rsl} = c^l_{rs}, \tag{18}$$

т. е. структурные константы c^l_{rs} и компоненты c_{rsl} тензора (17) совпадают.

---

[1]) В гл. 3, § 8 мы покажем, что алгебра Ли компактной группы Ли компактна. Это оправдывает распространение понятия компактности с групп на алгебры.