Коммутационные соотношения (1.23) для P означают, что для каждого τ можно выбрать ρ и σ таким способом, что $c_{\rho\sigma}^{\tau} = 0$ и $c_{\rho\sigma}^{\tau'} = 0$ при $\tau \neq \tau'$. Таким образом, $X_{\alpha\beta} = 0$ в соответствии с равенством (10). В свою очередь это подразумевает, что $[E_\alpha, X_\rho] = 0$ в силу равенств (7), (8) и (4). Следовательно, L является прямой суммой $P \oplus S$ двух идеалов.

Структурная теорема 3.2 подразумевает следующее обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть L — алгебра Ли, натянутая на базисные элементы алгебры Пуанкаре P и на базисные элементы произвольной компактной алгебры Ли K. Пусть C — максимальная коммутативная подалгебра в K. Если*

$$[P, C] = 0, \tag{11}$$

то L является прямой суммой идеалов:

$$L = P \oplus K. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.2, компактная алгебра Ли является суммой идеалов $N \oplus S$, где N — центр в K, а S полупроста. Ясно, что $[P, N] = 0$ ввиду (11). Пусть H — подалгебра Картана в S. Так как S полупроста, а $[P, H] = 0$, то теорема 1 означает, что $[P, S] = 0$. Значит, $L = P \oplus N \oplus S = P \oplus K$ — прямая сумма идеалов.

Эти результаты не исключают в принципе возможности вложения части алгебры Пуанкаре и других алгебр Ли симметрии в некоторые более широкие алгебры симметрии. Мы вернемся к этим вопросам в гл. 21, § 3.

§ 8. Контракция алгебр Ли

Пусть L — алгебра Ли. Контрактированную алгебру Ли L' алгебры L можно абстрактно ввести следующим образом (впоследствии мы покажем, что эта операция имеет физическое обоснование, когда определенные физические параметры стремятся к нулю или к бесконечности). Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — базис в L. Для подмножества $X_1, \ldots, X_\rho$, $\rho \leqslant r$, базисных элементов определим

$$Y_i \equiv \lambda^{-1} X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \rho \leqslant r, \tag{1}$$

и выразим через Y_i коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j] &= c_{ij}^k \lambda^{-1} Y_k + \lambda^{-2} c_{ij}^m X_m, \\ [Y_i, X_m] &= c_{im}^k Y_k + c_{im}^n \lambda^{-1} X_n, \\ [X_m, X_n] &= c_{mn}^i \lambda Y_i + c_{mn}^s X_s, \\ & i, j, k \leqslant \rho, \quad \rho < m, n, s \leqslant r. \end{aligned} \tag{2}$$

Устремим теперь $\lambda \to \infty$ и выясним, когда элементы

$$Y_1, \ldots, Y_\rho, X_{\rho+1}, \ldots, X_r$$

снова образуют алгебру Ли, именно контрактированную алгебру Ли L'_ρ. Это имеет место, когда выполняется условие

$$c^i_{mn} = 0, \quad i \leqslant \rho, \quad \rho < m, \ n \leqslant r. \tag{3}$$

Ясно, что если $\rho = r$, то L'_r есть абелева алгебра Ли

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r.$$

Имеется много важных и интересных нетривиальных случаев, когда $\rho < r$.

Пример 1. Контракция алгебр де Ситтера o (3, 2) и o (4, 1) в алгебру Ли группы Пуанкаре.

Алгебры Ли де Ситтера имеют базисные элементы $M_{ab} = -M_{ba}$, $a, b = 1, 2, \ldots, 5$, удовлетворяющие

$$[M_{ab}, M_{cd}] = -[g_{bc}M_{ad} - g_{ac}M_{bd} + g_{ad}M_{bc} - g_{bd}M_{ac}), \tag{4}$$

где

$$g_{ab}: \ ----++ \quad \text{для} \quad o(3, 2),$$
$$g_{ab}: \ ----+- \quad \text{для} \quad o(4, 1).$$

Пусть теперь $M_{5\mu} = RP_\mu$, и пусть $R \to \infty$. Тогда ($\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$)

$$[P_\mu, P_\nu] = \frac{1}{R^2}[M_{5\mu}, M_{5\nu}] = -\frac{1}{R^2}g_{55} M_{\mu\nu} \to 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \frac{1}{R}\left[M_{\mu\nu}, M_{5\rho}\right] = -\frac{1}{R}(g_{\mu\rho}M_{\nu 5} - g_{\nu\rho}M_{\mu 5}) =$$

$$= -g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu. \tag{5}$$

Определяя теперь генераторы $\tilde{M}_{\mu\nu} = -M_{\mu\nu}$, получаем для $M_{\mu\nu}$ и P_σ коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре (см. соотношения (1.23)).

Пример 2. Контракция алгебры Ли Пуанкаре в алгебру Ли группы Галилея.

Эта задача имеет одно абстрактное математическое решение, другое, отличное от первого, — физическое, как будет видно в гл. 13. С целью формального решения рассмотрим элементы алгебры Ли Пуанкаре P_μ, $M_{\mu\nu}$ с коммутационными соотношениями, заданными согласно (1.23). Пусть

$$M_{0i} \equiv cK_i, \quad c \to \infty.$$

Тогда

$$[M_{ij},\ K_k] = \frac{1}{c}[M_{ij},\ M_{0k}] = \frac{1}{c}(g_{jk}M_{0i} - g_{ik}M_{0j}) = g_{jk}K_i - g_{ik}K_j,$$

$$[K_i,\ K_j] = \frac{1}{c^2}[M_{0i},\ M_{0j}] = \frac{1}{c^2}M_{ij} \to 0, \tag{6}$$

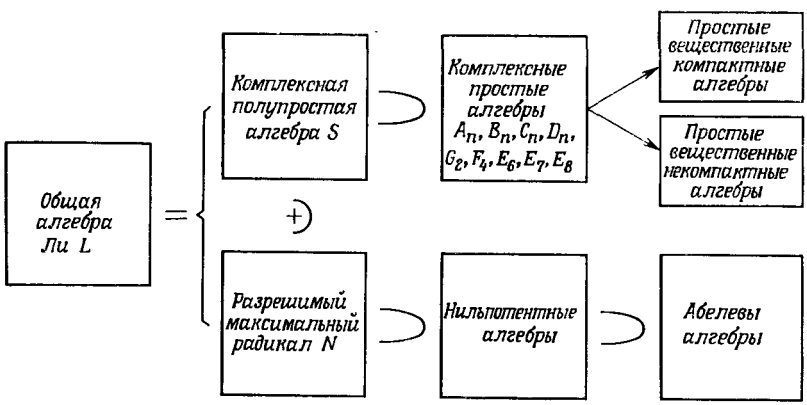
$$[K_i,\ P_\mu] = \frac{1}{c}[M_{0i},\ P_\mu] \to 0.$$

Элементы M_{ij}, K_i, P_i, P_0 образуют базис алгебры Ли группы Галилея.

Относительно упомянутой физической мотивировки и значения процедуры контракции мы отсылаем читателя к гл. 13.

§ 9. Комментарии и дополнения

А. Следующая диаграмма иллюстрирует соотношения между различными типами алгебр Ли:



Б. На фиг. 1 и 2 изображено множество всех вещественных простых алгебр Ли, соответствующих классическим простым комплексным алгебрам Ли (полученное обоими методами А и Б из § 5).

В. Первые существенные, хотя и неполные, результаты, касающиеся классификации комплексных простых алгебр Ли, были получены Киллингом в [453]. Теория Киллинга была завершена и расширена Картаном в его диссертации [158]. Он ввел корни как нули характеристического полинома $\det[\lambda I - \operatorname{ad} X]$. Впоследствии Вейль [839, 841] и Ван-дер-Варден [823] значительно упростили теорию, используя подалгебру Картана в качестве основного инструмента в задаче о классификации. Здесь мы следуем изящному методу, разработанному Дынкиным в [237].