Например, для $L = G_2$ имеем $S = \mathrm{sl}\,(3, C)$ и $V = C^3$ (более подробно см. в [385], гл. II.4 и гл. III).

Д. Теорема 7.1 об алгебрах пространственно-временных и внутренних симметрий была впервые доказана Макглинном [585], следовавшим предложениям объединить эти две алгебры, а в общем виде, представленном здесь, — Коестером, Хамермешем и Макглинном [190]. Смотри также обзор Хегерфельдта и Хеннига [386], где имеется обширная библиография.

Е. Понятие групповых контракций и их представлений впервые было введено Иноню и Вигнером в [426].

## § 10. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что векторное произведение $a \times b$, $a, b \in R^3$, удовлетворяет аксиомам алгебры Ли.

§ 1.2. Покажите, что скобки Пуассона классической механики

$$[f, g] \equiv \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right), \quad f, g \in C,$$

где $R^{2n}$ — фазовое пространство, определяют алгебру Ли. То же покажите для скобок Якоби векторнозначных функций $[f, g] = g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g$.

§ 1.3. *Централизатор* $C$ алгебры Ли $L$ состоит из всех элементов $C$, таких, что $[C, X] = 0$ для всех $X \in L$. Покажите, что $C$ — подалгебра.

§ 1.4. Найдите $L^C$, $(L^C)^R$ и $((L^C)^R)^C$ для алгебры Ли $L = \mathrm{so}\,(3, 1)$ Лоренца.

§ 1.5. Найдите все алгебры Ли, базисные элементы которых являются полиномами от $Q = x$ и $P = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

§ 1.6. Найдите трехмерное матричное представление нильпотентной алгебры Гейзенберга $[P, Q] = -\mathrm{i}I$ (см. теорему 2.2).

§ 1.7. Найдите дифференциальные операторы второго порядка, которые вместе с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{\omega^2}{2} Q^2$$

образуют алгебру Ли $\mathrm{su}\,(1, 1)$, где $Q = x$, $P = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

§ 1.8. Пусть $L$ — любая неассоциативная конечномерная алгебра с законом умножения $xy \in L$, $x \in L$, $y \in L$, и пусть $D$ — дифференцирование алгебры $L$. Покажите, что

$$\varphi_t \equiv e^{tD} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu$$

удовлетворяет

$$\varphi_t(xy) = (\varphi_t x)(\varphi_t y)$$

и

$$\varphi_t[x, y] = [\varphi_t x, \varphi_t y].$$

*Указание*: воспользоваться правилом Лейбница

$$D^n(xy)/n! = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!} D^j x\right)\left(\frac{1}{(n-j)!} D^{n-j} y\right).$$

§ 1.9. Пусть $L$ — алгебра Ли с базисными элементами $X_1, \ldots, X_r$. Пусть $L'$ — векторное пространство, натянутое на $X_1, \ldots, X_r$ и на новый элемент $Y$. Для того чтобы $L'$ было алгеброй Ли (расширением $L$), должны существовать некоторые ограничения на коэффициенты $a_i^k$ в уравнении

$$[Y, X_i] = a_i^k X_k.$$

Покажите, что существует тривиальное расширение $L' = L \oplus \{Y\}$ (несобственное расширение), и определите собственное нетривиальное расширение.

§ 1.10. Пусть $H$ — гамильтониан физической системы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и пусть $\mathscr{A}$ — множество всех линейных операторов в $\mathscr{H}$, коммутирующих с $H$. Покажите, что $\mathscr{A}$ — алгебра Ли (вообще говоря, бесконечномерная алгебра Ли).

§ 1.11. Покажите, что алгеброй дифференцирований алгебры Ли (1.23) группы Пуанкаре является 11-параметрическая алгебра Вейля, состоящая из алгебры Ли Пуанкаре и генератора $D$ дилатаций с

$$[D, P_\mu] = -P_\mu, \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0.$$

§ 2.1. Проклассифицируйте все алгебры Ли размерности 2 и 3 (имеются две алгебры Ли размерности 2, одна абелева и одна разрешимая, заданные при помощи $[e_1, e_2] = e_1$. Алгебрами Ли размерности 3 являются: а) абелева; б) нильпотентная $[e_1, e_2] = 0$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = 0$; в) $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$; г) класс разрешимых алгебр $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $[e_2, e_3] = \beta e_1 + \delta e_2$, $\alpha\beta - \beta\gamma \neq 0$ (включает евклидовы алгебры e (3) и e (2, 1)); д) две простые алгебры so (3) и so (2, 1).)

Более конкретно, записывая $[e_i, e_j] = f_k$ ($i, j, k$ — циклические), имеем

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 0 | 0 | $e_1$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_1$ | $e_1$ | $e_1$ | $e_1$ |
| $f_2$ | 0 | 0 | 0 | $-e_1$ | $e_2$ | $-e_2$ | $e_1+pe_2$ | $e_2$ | $-e_2$ |
| $f_3$ | 0 | $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_3$ | $e_3$ |

§ 2.2. Покажите, что следующая алгебра Ли нильпотентна: $[1, 2] = 5$, $[1, 3] = 6$, $[1, 4] = 7$, $[1, 5] = -8$, $[2, 3] = 8$, $[2, 4] = 6$, $[2, 6] = -7$, $[3, 4] = -5$, $[3, 5] = -7$, $[4, 6] = -8$, все остальные коммутаторы равны нулю.

§ 2.3. Покажите, что любая четырехмерная нильпотентная алгебра имеет трехмерный идеал.

§ 2.4. Найдите все разрешимые подалгебры алгебр Ли а) группы Лоренца и б) группы Пуанкаре.

§ 2.5. Вычислите форму Киллинга для группы Пуанкаре.

§ 2.6. Коммутационными соотношениями алгебры Ли so $(p, q)$ являются

$$[L_{ab}, L_{cd}] = -g_{bc}L_{ad} - g_{ad}L_{bc} + g_{ac}L_{bd} + g_{bd}L_{ac},$$

где $g_{ab}$ — метрический тензор. Покажите, что метрический тензор Картана

$$g_{ab,\,\alpha\beta} = (c_{ab})^{ef}_{cd}\,(c_{\alpha\beta})^{cd}_{ef}$$

имеет простой вид

$$g_{ab,\,\alpha\beta} = \mathrm{const}\,(g_{a\beta}g_{b\alpha} - g_{a\alpha}g_{b\beta}).$$

§ 2.7. Пусть $\psi(\boldsymbol{x})$ — нерелятивистское квантовое поле, удовлетворяющее при фиксированном $t$ каноническим коммутационным соотношениям

$$[\psi(\boldsymbol{x}), \psi^*(\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$[\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})] = [\psi^*(\boldsymbol{x}), \psi^*(\boldsymbol{y})] = 0.$$

Определим ток

$$J_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\psi^*(\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{\partial_k}\psi(\boldsymbol{x}).$$

Покажите, что

$$[J_k(\boldsymbol{x}), J_l(\boldsymbol{y})] = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^l}\,[J_k(\boldsymbol{x})\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})] +$$
$$+\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y^k}\,[J_l(\boldsymbol{y})\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})].$$

Является ли $\{J_k(\boldsymbol{x})\}$ алгеброй Ли?

§ 2.8. Положите в предыдущей задаче

$$J_k(\boldsymbol{n}) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} J_k(\boldsymbol{x})\, e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3\boldsymbol{x}.$$

Покажите, что

$$[J_k(\boldsymbol{n}),\ J_l(\boldsymbol{m})] = m_l J_k(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) - n_k J_l(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}).$$

Найдите конечномерную подалгебру этой алгебры.

§ 2.9. Пусть $\rho(\boldsymbol{x}) = \psi^*(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x})$ — плотность заряда из предыдущих задач. Покажите, что

$$[\rho(\boldsymbol{x}),\ \rho(\boldsymbol{y})] = 0$$

и

$$[\rho(\boldsymbol{x}),\ J_k(\boldsymbol{y})] = i\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\rho(\boldsymbol{y}).$$

Покажите, что $\rho(\boldsymbol{x})$ и $J_k(\boldsymbol{x})$ образуют конечномерную алгебру Ли.

§ 3.1. Проклассифицируйте все десятимерные алгебры Ли, которые содержат четырехмерную абелеву алгебру (т. е. классификация всех пространственно-временных групп).

*Указание*: воспользуйтесь теоремой Леви — Мальцева.

§ 4.1. Определите форму Картана — Вейля (см. теорему 4.3) алгебр Ли su (3), su (2, 2), o $(p, q)$.

§ 4.2. Вещественная алгебра Ли so (4, 2) размерности 15 задана следующими коммутационными соотношениями базисных элементов:

$M_{\mu\nu}$ и $P_\mu$ в точности те же, что и в (1.23):

$$\begin{aligned}
[D,\ M_{\mu\nu}] &= 0,\\
[D,\ P_\mu] &= -P_\mu,\\
[K_\lambda,\ M_{\mu\nu}] &= g_{\mu\lambda}K_\nu - g_{\nu\lambda}K_\mu,\\
[K_\nu,\ P_\mu] &= -2(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}),\\
[D,\ K_\mu] &= K_\mu,\\
[K_\mu,\ K_\nu] &= 0.
\end{aligned}$$

Покажите, что, хотя максимальная коммутативная подалгебра четырехмерна, подалгебра Картана имеет размерность 3.

§ 4.3. Рассмотрите отражение $\Sigma_\alpha$ в $l$-мерном корневом пространстве плоскостью, перпендикулярной к корню $\alpha$. Покажите, что отраженный корень

$$\Sigma_\alpha\beta = \beta - \frac{2(\beta\alpha)}{(\alpha\alpha)}\,\alpha$$

также является корнем, и $\Sigma_\alpha\alpha = -\alpha$ (отражение Вейля).

§ 6.1. Найдите разложение Ивасавы для алгебры Ли Лоренца so (3, 1).