

прерывна слева, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V единицы e , такая, что

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_H < \varepsilon, \text{ как только } x^{-1}y \in V. \quad (13)$$

§ 3. Мера Хаара

В этом разделе вводится важное понятие инвариантной меры и инвариантного интегрирования на топологической группе G . Пусть G — локально компактная группа, и пусть $C_0(G)$ и $C_0^+(G)$ обозначают пространства непрерывных и непрерывных неотрицательных функций на G с компактным носителем соответственно. Положительная мера Радона — это положительная линейная форма μ на $C_0(G)$, неотрицательная на $C_0^+(G)$, т. е.

$$\mu(f) \geq 0 \text{ для } f \in C_0^+(G). \quad (1)$$

Положительная мера Радона μ , инвариантная слева, т. е.

$$\mu(T_g^L f) = \mu(f), \text{ где } T_g^L f(x) = f(g^{-1}x), \quad x, g \in G, \quad (2)$$

называется левой мерой Хаара (или левым интегралом Хаара).

Аналогично определяется правая мера Хаара λ , удовлетворяющая условию

$$\lambda(T_g^R f) = \lambda(f), \text{ где } T_g^R f(x) = f(xg), \quad x, g \in G.$$

ТЕОРЕМА 1. Всякая локально компактная группа обладает левой мерой Хаара μ . Если ν — любая другая ненулевая левая мера Хаара, то $\nu = c\mu$ при некотором положительном числе c .

(Доказательство см. в [405], гл. IV, § 15.)

Пусть G — локально компактная группа с законом умножения xy , и пусть G^* — новая группа с теми же элементами и той же топологией, но с новым законом группового умножения $x \times y$, определенным согласно

$$x \times y = yx. \quad (3)$$

Если G^* имеет левую меру Хаара μ , заданную согласно теореме 1, то G имеет и правую меру Хаара: действительно, для $g^* \in G^*$ имеем

$$(T_g^L \times f)(x) = f(g^{*-1} \times x) = f(xg^{-1}) = T_{g^{-1}}^R f(x),$$

значит,

$$\lambda(T_g^R f) \equiv \mu(T_g^R f) = \mu(T_{g^{-1}}^L f) = \mu(f) = \lambda(f), \quad (4)$$

т. е. λ — правая мера Хаара. Следовательно, существование левой меры Хаара подразумевает существование правой меры Хаара (см. также упражнения 4 и 6). Поэтому ввиду теоремы 1 каждая локально компактная группа имеет также и правую меру

Хаара λ , определенную с точностью до положительного постоянного множителя. Мера Хаара, инвариантная как слева, так и справа, называется *инвариантной мерой*.

Согласно теореме Риса, с мерой $\mu(f)$ можно ассоциировать функцию множества $\mu(X)$ для измеримого множества $X \subset G$, такую, что

$$\mu(f) = \int_G f(g) d\mu(g). \quad (5)$$

Инвариантность слева (2) меры Хаара означает, что

$$\mu(gX) = \mu(X), \quad \text{или} \quad d\mu(gx) = d\mu(x), \quad (6)$$

для всех $X \subset G$, $g, x \in G$.

ПРИМЕР 1. Пусть G — группа всех комплексных 2×2 -матриц с равным единице определителем, т. е. $G = \mathrm{SL}(2, C)$. Построим явно инвариантную меру Хаара для G .

Каждый элемент из G — это матрица $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, и ее можно отождествить с точкой в C^4 . Унимодулярные матрицы образуют в C^4 поверхность второго порядка $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. С этой поверхностью свяжем дифференциальную форму $d\omega$, определенную по формуле

$$d\alpha d\beta d\gamma d\delta = d(\alpha\delta - \beta\gamma) d\omega = J d(\alpha\delta - \beta\gamma) d\beta d\gamma d\delta, \quad (7)$$

где J — якобиан перехода $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \rightarrow [(\alpha\delta - \beta\gamma), \beta, \gamma, \delta]$, откуда получаем для $d\omega$ следующее выражение:

$$d\omega(g) = \frac{1}{|\delta|^2} d\beta d\gamma d\delta. \quad (8)$$

При левом сдвиге $g \rightarrow g_0 g$ на элемент $g_0 \in \mathrm{SL}(2, C)$ форма $d\alpha d\beta d\gamma d\delta$, так же как и определитель $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ матрицы $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, сохраняется. Следовательно, форма $d\omega$ также сохраняется. То же самое справедливо для правых сдвигов $g \rightarrow gg_0$. Таким образом, положительная форма

$$d\mu(g) = d\omega d\bar{\omega} = \frac{1}{|\delta|^2} d\beta d\gamma d\delta d\bar{\beta} d\bar{\gamma} d\bar{\delta} \quad (9)$$

удовлетворяет

$$d\mu(g_0 g) = d\mu(g g_0) = d\mu(g). \quad (10)$$

В силу этого равенство (9) задает инвариантную меру Хаара на $\mathrm{SL}(2, C)$. Тогда, ввиду теоремы 1, любая другая мера Хаара пропорциональна мере (9).

Заметим, что, поскольку $g^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$, из (9) имеем еще

$$d\mu(g^{-1}) = d\mu(g), \quad (11)$$

что выражает инвариантность меры Хаара при инверсии.

Другие примеры см. в упражнениях 2 и 5.

Инвариантность относительно инверсии

Пусть $\mu(\cdot)$ — левая мера Хаара, и пусть $\mu_g(f) \equiv \mu(T_g^R f)$. Так как левый и правый сдвиги коммутируют, мы имеем

$$\mu_y(T_g^L f) = \mu(T_y^R T_g^L f) = \mu(T_g^L T_y^R f) = \mu_y(f).$$

Значит, линейная положительная инвариантная мера $\mu_y(f)$ является мерой Хаара. С помощью теоремы 1 заключаем, что $\mu_y = \Delta(y) \mu$. Следовательно,

$$\mu(T_y^R f) = \Delta(y) \mu(f). \quad (12)$$

Поскольку отображение $G \ni y \rightarrow T_y^R f \in C_0(G)$ непрерывно, функция $\Delta(y)$ также непрерывна. Более того, она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y). \quad (13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta(xy) \mu(f) &= \mu(T_{xy}^R f) = \mu(T_x^R(T_y^R f)) = \Delta(x) \mu(T_y^R f) = \\ &= \Delta(x)\Delta(y) \mu(f). \end{aligned}$$

Функцию $\Delta(x)$ называют *модулярной функцией для группы* G . Если $\Delta(x) \equiv 1$, то ввиду равенства (12) правая и левая меры Хаара группы G совпадают. Если это имеет место, группу называют *унимодулярной*.

Ясно, что всякая абелева локально компактная группа унимодулярна, так как в этом случае $T_{g^{-1}}^R = T_g^L$. Более того, имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Всякая компактная группа унимодулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G компактна, то функция $f(x) \equiv 1$, $x \in G$, принадлежит $C_0^+(G)$; следовательно, нормируя левую меру Хаара условием $\mu(1) = 1$, получаем

$$\Delta(y) = \Delta(y) \cdot \mu(1) = \mu(T_y^R 1) = \mu(1) = 1.$$

Унимодулярные группы Ли описаны в гл. 3, § 10, Г.

Выведем теперь важнейшее свойство инверсии левой меры Хаара.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\mu(\cdot)$ — левая мера Хаара, и пусть $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. Тогда

$$\mu(f) = \mu\left(\check{f} \frac{1}{\Delta}\right) \text{ для каждой } f \in C_0^+(G). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\check{\mu}(f) \equiv \mu\left(\check{f} \frac{1}{\Delta}\right)$; тогда

$$\check{\mu}(T_y^L f) = \mu\left((T_y^L f)^\sim \frac{1}{\Delta}\right) = \mu\left(T_{y^{-1}}^R \check{f} \frac{1}{\Delta}\right) =$$

$$= \Delta(y^{-1}) \mu\left(T_{y^{-1}}^R \check{f} \frac{1}{\Delta}\right) = \Delta(y^{-1}) \Delta(y) \mu\left(\check{f} \frac{1}{\Delta}\right) = \check{\mu}(f).$$

Поэтому $\check{\mu}(\cdot)$ является левой мерой Хаара; следовательно, $\check{\mu}(f) = c \mu(f)$.

Покажем теперь, что $c = 1$. Пусть ξ — положительное число, и пусть U — окрестность единицы e в G такая, что $\left|\frac{1}{\Delta(x)} - 1\right| < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Пусть h — ненулевой элемент в $C_0^+(G)$, такой, что $\check{h} = h$, а h исчезает на дополнении U' окрестности U . Тогда

$$\left|h(x) - h(x) \frac{1}{\Delta(x)}\right| < \varepsilon h(x) \text{ для всех } x \in G;$$

следовательно,

$$\left|\mu(h) - \mu\left(h \frac{1}{\Delta}\right)\right| < \varepsilon \mu(h).$$

Это подразумевает $|1 - c| < \varepsilon$, т. е. $c = 1$. Таким образом, $\mu(f) = \mu\left(\check{f} \frac{1}{\Delta}\right)$ для всех $f \in C_0^+(G)$.

Заметим, что для унимодулярной группы G мы имеем $\mu(f) = \mu(\check{f})$, т. е.

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x^{-1}), \quad (15)$$

что означает $d\mu(x) = d\mu(x^{-1})$.

Другими словами, каждая инвариантная мера Хаара инвариантна также относительно инверсии; равенство (11) является точной записью этого свойства меры Хаара для $SL(2, C)$.