## § 4. Комментарии и дополнения

### А. *Теорема Макки о разложении*

Следующая теорема дает важный тип разложения произвольного элемента топологической группы $G$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $G$ — сепарабельная локально компактная группа, и пусть $K$ — замкнутая ее подгруппа. Тогда в $G$ существует борелевское множество $S$, такое, что каждый элемент $g \in G$ можно единственным образом представить в виде*

$$g = ks, \quad k \in K, \quad s \in S. \tag{1}$$

(Доказательство см. в [552], часть I, лемма 1.1.)

Разложение (1) играет существенную роль в теории индуцированных представлений топологических групп (см. гл. 16).

### Б. *Универсальная накрывающая группа*

Связь между глобальными и локальными свойствами топологических групп описывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\Gamma$ — класс всех линейно связных, локально связных, локально односвязных топологических групп, которые локально изоморфны некоторой топологической группе $G$. Тогда в классе $\Gamma$ существует, с точностью до изоморфизма, одна и только одна односвязная группа $\tilde{G}$. Любая другая группа класса $\Gamma$ является фактор-группой $\tilde{G}/N$, где $N$ — дискретная нормальная подгруппа.*

(Доказательство см. в [678], гл. IX, раздел 51.)

Группа $\tilde{G}$ называется *универсальной накрывающей группой* всех групп в классе $\Gamma$.

Теорема 2 играет важную роль в теории представлений групп, поскольку связность группового пространства непосредственно связана с однозначностью представлений группы $G$.

### В. *Инвариантная метрика*

Интересным является тот факт, что топологическая группа $G$ обладает не только инвариантной мерой, но также и инвариантной метрикой. Действительно, имеется

ТЕОРЕМА 3 (теорема Биркгофа — Какутани). *Пусть $G$ — топологическая группа, открытые множества которой в единице $e$*

*имеют счетную базу* [1]). *Тогда существует функция расстояния* $d(\cdot, \cdot)$, *которая инвариантна справа, т. е.*

$$d(xg, yg) = d(x, y) \text{ для всех } x, y \text{ и } g \text{ из } G, \tag{2}$$

*и которая индуцирует на* $G$ *исходную топологию.*

(Доказательство см. в [597], гл. 1, § 22.)

Г. *Библиографические замечания*

Аксиоматическое определение топологической группы в используемом сегодня виде было впервые дано польским математиком Лейа в [510]. Этот объект стал весьма популярным в начале 30-х годов нашего века и исследовался многими видными математиками, такими, как Ван Данциг, Хаар, фон Нейман и другими.

Понятие инвариантного интегрирования на непрерывных группах было введено еще в прошлом веке Гурвицом. Позднее Вейль [839] вычислил инвариантный интеграл для $O(n)$ и $U(n)$; вскоре Петер и Вейль [673] показали существование инвариантного интеграла для произвольной компактной группы. Решающим достижением явился результат Хаара [360], непосредственно построившего левоинвариантный интеграл для локально компактной группы со счетной открытой базой. Этот результат оказался неожиданным даже для выдающихся математиков, например, для фон Неймана, который не верил в существование инвариантных интегралов для столь широкого класса топологических групп.

Конструкция Хаара была распространена Вейлем [829] на произвольную локально компактную группу.

Инвариантная мера существует также на некоторых не локально компактных группах. В частности, инвариантная мера для полных метрических групп была построена Окстоби в [656]. Более подробное рассмотрение можно найти в книгах Хьюитта и Росса [405] и Нахбина [613].

## § 5. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что существует 9 топологических пространств, состоящих из 3 элементов, таких, что никакие два из них не гомеоморфны.

§ 1.2. Покажите, что следующие двухточечные функции [помимо (1.2) и (1.3)] определяют метрику на соответствующих множествах:

---

[1]) Семейство $B(x)$, $x \in X$, окрестностей точки $x$, обладающих тем свойством, что для всякого открытого множества $V$, содержащего $x$, существует $U \in B(x)$, такая, что $x \in U \subset V$ называется базой топологического векторного пространства $(X, \tau)$ в точке $x$.