имеют счетную базу [1]). *Тогда существует функция расстояния* $d(\cdot, \cdot)$, *которая инвариантна справа, т. е.*

$$d(xg, yg) = d(x, y) \text{ для всех } x, y \text{ и } g \text{ из } G, \tag{2}$$

и которая индуцирует на G *исходную топологию.*

(Доказательство см. в [597], гл. 1, § 22.)

Г. *Библиографические замечания*

Аксиоматическое определение топологической группы в используемом сегодня виде было впервые дано польским математиком Лейа в [510]. Этот объект стал весьма популярным в начале 30-х годов нашего века и исследовался многими видными математиками, такими, как Ван Данциг, Хаар, фон Нейман и другими.

Понятие инвариантного интегрирования на непрерывных группах было введено еще в прошлом веке Гурвицом. Позднее Вейль [839] вычислил инвариантный интеграл для $O(n)$ и $U(n)$; вскоре Петер и Вейль [673] показали существование инвариантного интеграла для произвольной компактной группы. Решающим достижением явился результат Хаара [360], непосредственно построившего левоинвариантный интеграл для локально компактной группы со счетной открытой базой. Этот результат оказался неожиданным даже для выдающихся математиков, например, для фон Неймана, который не верил в существование инвариантных интегралов для столь широкого класса топологических групп.

Конструкция Хаара была распространена Вейлем [829] на произвольную локально компактную группу.

Инвариантная мера существует также на некоторых не локально компактных группах. В частности, инвариантная мера для полных метрических групп была построена Окстоби в [656]. Более подробное рассмотрение можно найти в книгах Хьюитта и Росса [405] и Нахбина [613].

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что существует 9 топологических пространств, состоящих из 3 элементов, таких, что никакие два из них не гомеоморфны.

§ 1.2. Покажите, что следующие двухточечные функции [помимо (1.2) и (1.3)] определяют метрику на соответствующих множествах:

---

[1]) Семейство $B(x)$, $x \in X$, окрестностей точки x, обладающих тем свойством, что для всякого открытого множества V, содержащего x, существует $U \in B(x)$, такая, что $x \in U \subset V$ называется базой топологического векторного пространства (X, τ) в точке x.

а) на множестве наборов из n вещественных чисел

$$d(x, y) = \max |x_i - y_i|;$$

б) на множестве X всех непрерывных вещественных функций на замкнутом интервале $[0, 1]$

$$d(x, y) = \left[\int_0^1 (x(t) - y(t))^2 \, dt\right]^{1/2},$$

или

$$d(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|;$$

в) на произвольном множестве X

$$d(x, y) = 1 \quad \text{при} \quad x \neq y,$$
$$d(x, x) = 0.$$

§ 1.3. Говорят, что последовательность A_n операторов в гильбертовом пространстве *сходится к A в равномерной топологии* (или *топологии норм*), если

$$\lim_{n \to \infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Покажите, что унитарная однопараметрическая группа сдвигов

$$U_t\colon u(x) \to u(x + t)$$

в $H = L^2(R^1)$ непрерывна в сильной топологии, но не в равномерной топологии. Заметим, что поскольку для любых t, t', $t \neq t'$,

$$\| U_t - U_{t'} \| = 2,$$

кривая $t \to U_t$ дискретна в равномерной топологии. Этот пример иллюстрирует различную природу непрерывности в различных топологиях.

§ 1.4. Пусть SU (3) — группа всех унитарных унимодулярных 3×3-матриц. Изучите связность $\mathrm{SU}(3)/Z_3$, где

$$Z_3 = \{I, e^{i2\pi/3} I, e^{i4\pi/3} I\}$$

— центр в SU (3). Обобщите это на $\mathrm{SU}(n)/Z_n$.

§ 1.5. Пусть (R, τ_1) и (R, τ_2) — вещественная прямая R, снабженная топологиями τ_1 и τ_2 соответственно. Покажите, что взаимно однозначное отображение $f\colon x \to y = x$ из (R, τ_1) в (R, τ_2) непрерывно тогда и только тогда, когда τ_1 сильнее τ_2.

§ 2.1. Пусть G — группа всех линейных преобразований в C^n, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_p\bar{z}_p - z_{p+1}\bar{z}_{p+1} - \cdots - z_n\bar{z}_n = 1.$$

Определите топологию τ на G, такую, что G становится топологической группой.

§ 2.2. Пусть G — группа O $(n, 1)$ всех вещественных преобразований в R^{n+1}, сохраняющих квадратичную форму

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2.$$

Покажите, что O (2, 1) бесконечнократно связна.

§ 2.3. Покажите, что O (3, 1) состоит из четырех компонент. Проверьте, что результат справедлив также для группы O $(n, 1)$, $n \geqslant 3$.

§ 2.4. Пусть $X = R^n$, и пусть G — множество всех взаимно однозначных преобразований из C^∞, f: $R^n \to R^n$, таких, что обратное преобразование также принадлежит C^∞. Группа G является группой преобразований координат (группой диффеоморфизмов). Для f и g из G функции

$$d(f, g)_n = \max_{\substack{0 \leqslant |m| \leqslant n \\ x \in R^n}} \sup \left| (1 + |x|^2)^n \left(f^{(m)}(x) - g(x)^{(m)}\right) \right|,$$

где

$$f^{(m)}(x) = (D^m f)(x), \quad D^m = D^{m_1} \ldots D^{m_l}, \quad D^{m_j} = \frac{\partial}{\partial x_{m_j}}, \quad |m| = l,$$

определяют метрику в G. Пусть τ_d обозначает топологию в G, заданную при помощи метрик d_n. Покажите, что групповые операции непрерывны по отношению к τ_d и поэтому (G, τ_d) является топологической группой.

§ 2.5. Пусть H — гильбертово пространство. Пусть G — группа всех унитарных операторов в H. Определите топологию τ на G такую, что G становится топологической группой.

§ 2.6. Рассмотрим пространство Шварца функций S на R^n как абелеву группу. Пусть $N = S \rtimes G$ (G — группа диффеоморфизмов в R^n, см. упражнение 2.3) — группа, определенная при помощи следующего закона композиции:

$$(s, g)(s', g') = (s + s' \circ g, g \circ g'),$$

где $s' \circ g$ и $g \circ g'$ обозначают композицию соответствующих отображений на R^n (например, $s' \circ g = s'[g(x)]$).

Покажите, что N, снабженная топологией произведения топологии Шварца на S и топологии τ_d на G, является топологической группой. (Примечание: это глобальная группа, ассоциированная с коммутационными соотношениями алгебры токов; см. гл. 1, § 10, упражнение 2.9.)

§ 3.1. Пусть μ — левая мера Хаара на G. Определим новую меру

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}), \quad \text{где } \check{f}(x) = f(x^{-1}).$$

Покажите, что $\check{\mu}$ — правая мера Хаара на G.

§ 3.2. Рассмотрим группу G всех матриц вида

$$G \ni g = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x, y \in R, \quad x \neq 0.$$

Покажите, что левая мера Хаара имеет вид

$$d\mu(g) = \frac{dx\,dy}{x^2}.$$

§ 3.3. Покажите, что единственной трансляционно инвариантной мерой на вещественной прямой R является мера, пропорциональная мере Лебега, т. е. $d\mu(x) = c\,dx$, $c = \text{const}$.

§ 3.4. Пусть G — множество всех вещественных невырожденных 2×2-матриц вида

$$G \ni g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (\text{т. е. } G = \mathrm{GL}(2, R)).$$

Покажите, что левая и правая инвариантные меры Хаара на G имеют вид

$$d\mu(g) = \frac{d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}.$$

§ 3.5. Пусть $G = \mathrm{GL}(n, R)$. Покажите, что мера Хаара имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx}{|\det X|^n},$$

где

$$dx = \prod_{i,\,j=1}^{n} dx_{ij}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \in G.$$

§ 3.6. Пусть G — группа всех треугольных вещественных $n\times n$-матриц

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Покажите, что левая мера Хаара на G имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx_{11}dx_{12}\ldots dx_{n-1,\,n}dx_{nn}}{|x_{11}^n x_{22}^{n-1}\ldots x_{n-1,\,n-1}^2 x_{nn}|},$$

тогда как правая мера Хаара имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx_{11}dx_{12}\ldots dx_{n-1,\,n}dx_{nn}}{|x_{11}x_{22}^2\ldots x_{nn}^n|}.$$