$\Omega(p)$. Отображение $d\Omega_p$: $L \to L'$ мы называем дифференциалом отображения Ω в точке p. В силу теоремы 1 базисные векторы в касательных пространствах в точках p и $\Omega(p)$ задаются формулами

$$e_i\colon f \to \frac{\partial f^*}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad f^* = f \circ \varphi^{-1}, \tag{13}$$

$$e'_j\colon g \to \frac{\partial g^*}{\partial y^j}\bigg|_{\varphi'(\Omega(p))}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad g^* = g \circ \varphi'^{-1}. \tag{14}$$

Поэтому мы имеем

$$d\Omega_p(e_i)\, g = e_i(g \circ \Omega) = \frac{\partial (g \circ \Omega)^*}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}. \tag{15}$$

Поскольку $(g \circ \Omega)^*(x^1, \ldots, x^m) = g^*(y^1, \ldots, y^m)$, где $y^j = \omega^j(x^1, \ldots, x^m)$, то

$$d\Omega_p(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(g)} e'_j. \tag{16}$$

Следовательно, если представим отображение $d\Omega_p$ как матрицу, используя базис e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, и базис e'_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, то получим хорошо известную матрицу Якоби системы (12).

Векторные поля X и Y на многообразиях M и N называют Ω-связанными, если

$$d\Omega_p X(p) = Y(\Omega(p)) \text{ для всех } p \in M. \tag{17}$$

Утверждение 2. *Пусть X_i и Y_i, $i = 1, 2$, Ω-связаны. Тогда*

$$d\Omega[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]. \tag{18}$$

Доказательство. Формула (17) может быть записана в виде

$$(Yf) \circ \Omega = X(f \circ \Omega) \text{ для всех } f \in C^\infty(N). \tag{19}$$

Следовательно,

$$Y_1(Y_2 f) \circ \Omega = X_1(Y_2 f \circ \Omega) = X_1(X_2(f \circ \Omega)). \tag{20}$$

Меняя индексы 1 и 2 и вычитая выражения (20), получим (18).

§ 2. Группы Ли

Рассмотрев общие свойства аналитических многообразий, мы теперь можем определить группы Ли.

Определение 1. Абстрактную группу G называют *группой Ли*, если

1. G — аналитическое многообразие.

2. Отображение $(x, y) \to xy^{-1}$ произведения $G \times G$ в G аналитично.

Условие 2 эквивалентно следующим двум условиям:

2′. Отображение $x \to x^{-1}$ группы G в себя аналитично.

2″. Отображение $(x, y) \to xy$ произведения $G \times G$ в G аналитично.

Действительно, положив в условии 2 $x = e$, видим, что y^{-1} аналитично по y; поэтому $xy = x(y^{-1})^{-1}$ аналитично по x и y. Обратно, если 2′ и 2″ удовлетворены, то $(x, y) \to (x, y^{-1})$ является аналитическим отображением $G \times G$ в себя и, следовательно, отображение $(x, y) \to (x, y^{-1}) \to xy^{-1}$ аналитично; поэтому имеет место условие 2. Заметим, что по условию 2″ левый сдвиг $T_x^L y = xy$ и правый сдвиг $T_x^R y = yx$ являются аналитическими отображениями.

Любая группа Ли является топологической группой относительно топологии, индуцированной ее аналитической структурой. Действительно, многообразие является хаусдорфовым пространством, а аналитическое отображение $(x, y) \to xy^{-1}$ непрерывно. Поэтому, согласно определению 2.2.1, группа Ли является топологической группой.

Более того, каждая группа Ли локально компактна. Это следует из того факта, что многообразие локально евклидово, а евклидово пространство R^n локально компактно.

Аддитивная группа R^n, сопоставляемая с многообразием R^n, является простым примером группы Ли. Очевидно, что отображение $(x, y) \to xy^{-1} \equiv x - y$ в этом случае аналитично. Следующий пример будет играть важную роль в последующих рассмотрениях.

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{GL}(n, R)$ (см. пример 2.2.3). Рассмотрим матричные элементы x^{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, элемента $x = \{x^{ij}\} \in \mathrm{GL}(n, R)$ как координаты точки в R^{n^2}. Поскольку отображение

$$\psi\colon x \to \det x$$

является непрерывным отображением R^{n^2} в R, то множество $\psi^{-1}(0)$ замкнуто в R^{n^2}. Следовательно, его дополнение $(\psi^{-1}(0))'$ в $\mathrm{GL}(n, R)$ является открытым подмножеством в R^{n^2}, которое представляет собой открытое аналитическое подмногообразие в R^{n^2}. Координаты z^{ij} элемента $z = xy^{-1}$ могут быть выражены как рациональные функции от x^{ls} и y^{tu}, и знаменатели этих рациональных функций отличны от нуля на $\mathrm{GL}(n, R)$. Поэтому отображение $(x, y) \to xy^{-1}$ аналитично и, следовательно, $\mathrm{GL}(n, R)$ — группа Ли.

Пусть (U_e, φ) — карта единичного элемента e группы Ли G. Через $x^i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначим координаты точки

$p \in U_e$, определенные гомеоморфизмом $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) \in R^n$. Из условия 2″ следует, что для каждой окрестности U_e точки e и для каждого открытого множества $V \times W$ в $G \times G$, такого, что [1]) $VW \subset U_e$, функции f^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, определенные формулой

$$(xy)^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, y^1, y^2, \ldots, y^n) \equiv f^i(x, y), \quad x \in V, \quad y \in W, \tag{1}$$

являются аналитическими функциями своих аргументов. Функции $f^i(x, y)$ называются *функциями композиции* группы G. Они удовлетворяют очевидным соотношениям

$$f^i(x, e) = x^i, \quad f^i(e, y) = y^i, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|_{(e,\, e)} = \left.\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right|_{(e,\, e)} = \delta^j_i. \tag{3}$$

Из непрерывности группового умножения следует, что в локально евклидовых топологических группах функции композиции всегда непрерывны.

Возникает естественный вопрос: когда локально евклидова топологическая группа является группой Ли. Этот вопрос был поставлен в 1900 г. Гильбертом и известен как пятая проблема Гильберта. Следующая теорема дает решение этого вопроса.

Теорема 1. *Локально евклидова топологическая группа изоморфна группе Ли.*

(Доказательство см. в [597], гл. IV, § 4.10.)

Теорема 1 утверждает, в частности, что существование непрерывных функций композиции в локально евклидовой топологической группе предполагает существование (в некоторой собственной системе координат) аналитических функций композиции.

Класс бесконечномерных топологических групп, которые часто встречаются в классической и квантовой физике, представляет собой интересный класс топологических групп, которые не являются группами Ли. Например, абелева группа градиентных преобразований классической электродинамики

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varphi, \tag{4}$$

где φ — скалярная градиентная функция, не является группой Ли, так как она не локально евклидова (см. пример 2.2.5).

Заметим, что определение 1 определяет фактически вещественную группу Ли. Ниже под группой Ли всегда будем понимать вещественную группу Ли, если не утверждается другое. Комплексные группы Ли определяются следующим образом.

---

[1]) Произведение VW обозначает подмножество в G, состоящее из элементов vw, $v \in V$, $w \in W$.

Определение 2. Абстрактная группа называется *комплексной группой Ли*, если

1° G — комплексное аналитическое многообразие,

2° отображение $(x, y) \to xy^{-1}$ произведения $G \times G$ в G голоморфно.

Пример 2. Пусть $G = \mathrm{GL}(n, C)$. Матричные элементы $x^{ij} \in C$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $x = \{x^{ij}\} \in \mathrm{GL}(n, C)$ могут рассматриваться как координаты точки в C^{n^2}. Так как множество $X = \{x\colon \det x = 0\}$ замкнуто в C^{n^2} (см. пример 1), то $\mathrm{GL}(n, C)$ представляет собой открытое подмножество в C^{n^2} и, следовательно, является комплексным аналитическим подмногообразием в $\mathcal{C}^{n^2}$ [1]). Так же, как в примере 1, проверяется, что координаты z^{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, элемента $z = xy^{-1}$ являются голоморфными функциями координат x^{ts} и y^{tu}, $l, s, t, u = 1, 2, \ldots, n$.

Любая комплексная группа Ли комплексной размерности n может рассматриваться как вещественная группа Ли вещественной размерности $2n$. Действительно, комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности n может рассматриваться как вещественное вещественной размерности $2n$, и голоморфное отображение $(x, y) \to xy^{-1}$ становится аналитическим отображением, если его рассматривать на этом вещественном $4n$-мерном многообразии.

Заметим, что существуют истинно вещественные группы Ли, которые определяются комплексными матрицами, например, группы $\mathrm{SU}(2n)$, $n = 1, 2, \ldots$; они не могут рассматриваться как комплексные группы, так как они имеют нечетные размерности.

Определение 3. Пусть G — группа Ли. Говорят, что подмножество $H \subset G$ является *аналитической подгруппой* в G, если

1° H — подгруппа в G,

2° H — аналитическое подмногообразие в G.

Аналитическая подгруппа сама является группой Ли. Действительно, имеет место

Утверждение 2. *Любая аналитическая подгруппа H группы Ли G является группой Ли.*

Доказательство. Пусть $a, b \in H$. Тогда $ab \in H$ и существует локальная система координат (U, φ), $\varphi(z) = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$ окрестности точки ab в G, такая, что $z^i | H$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $\nu = \dim H$, образуют локальную систему координат окрестности точки ab в H. Элемент $xy \in G$ близок к ab, если x и y близки к a и b соответственно. Это утверждение остается справедливым, если x

---

[1]) $\mathcal{C}^n$ является комплексным аналитическим многообразием, определенным пространством C^n и декартовыми координатами.

и y взяты из H. Таким образом, отображение $(x, y) \to xy$, ограниченное на $H \times H$, аналитично. Аналогично можно показать, что отображение $x \to x^{-1}$, ограниченное к H, также аналитично. Поэтому аналитическая подгруппа H группы Ли G является группой Ли.

Так как аналитические подгруппы Ли G сами являются группами Ли, то они обычно называются подгруппами Ли группы Ли G.

Аналитический гомоморфизм $t \to x(t)$ группы R в группу Ли называют *однопараметрической подгруппой* в G.

Пример 3. Рассмотрим подгруппу $\mathrm{GL}(m, R)$, $m < n$, группы $\mathrm{GL}(n, R)$. Она представляет собой подмножество из $\mathrm{GL}(n, R)$, которое, согласно примеру 1, является аналитическим подмногообразием в $\mathrm{GL}(n, R)$. Следовательно, условия 1° и 2° определения 3 выполнены и $\mathrm{GL}(m, R)$, $m < n$, — подгруппа Ли в $\mathrm{GL}(n, R)$.

Следующая теорема дает удобный критерий того, что локально компактная топологическая группа является группой Ли.

Теорема 3. *Локально компактная топологическая группа G является группой Ли, если существует непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм G в $\mathrm{GL}(n, R)$.*

(Доказательство см. в [597], гл. II, § 16.)

Например, группы $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ (которая является подгруппой в $\mathrm{O}(2n)$) и $\mathrm{Sp}(n)$ (которая является подгруппой в $\mathrm{O}(4n)$) являются группами Ли.

А. *Структурные константы*

Пусть G — группа Ли, а (V_e, φ) — карта единичной точки e, такая, что $\varphi(e) = 0$. Рассмотрим разложения Тейлора функций композиции (1) в точке $x^i = y^i = 0$. Используя формулы (1), (2) и (3), получаем

$$f^i = x^i + y^i + a^i_{jk} x^j y^k + b^i_{jkl} x^j x^k y^l + d^i_{jkl} x^j y^k y^l + r_4, \tag{5}$$

где

$$a^i_{jk} = \left. \frac{\partial f^i}{\partial x^j \, \partial y^k} \right|_{00}, \ldots \tag{6}$$

Числа

$$c^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj} \tag{7}$$

называются *структурными константами*. При переходе к другой системе координат

$$x^i \to x^{i'} = x^{i'}(x^k)$$

структурные константы подвергаются следующему преобразованию:

$$c^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Bigg|_0 c^i_{jk}.$$

Следовательно, c^i_{jk} — тензор с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами. Из формулы (7) следует также, что

1) c^i_{lk} — вещественные числа,

2) для коммутативных групп $c^i_{lk} = 0$,

$$3)\ c^i_{lk} = -c^i_{kl}, \tag{8}$$

$$4)\ c^p_{is}c^s_{jk} + c^p_{js}c^s_{ki} + c^p_{ks}c^s_{ij} = 0.$$

Последнее тождество является следствием ассоциативности группового умножения. Чтобы доказать его, прежде всего вычисляем, используя разложение (5), координаты элемента $w = x(yz)$, а затем элемента $w' = (xy)z$. Сравнивая выражения третьего порядка, получаем последнее тождество.

Пример 4. Для иллюстрации найдем структурные константы для GL (n, R). Функции композиции в этом случае (см. пример 1) совпадают с

$$z^{ij} = f^{ij}(x, y) = x^{ik}y^{kj}.$$

Следовательно, используя определения (5) и (6), получаем

$$a^{ij}_{sm,\,kr} = \left.\frac{\partial f^{ij}(x, y)}{\partial x^{sm}\partial y^{kr}}\right|_{\substack{x=e\\y=e}} = \delta^i_s\delta_{mk}\delta^j_r,$$

$$c^{ij}_{sm,\,kr} = \delta^i_s\delta_{mk}\delta^j_r - \delta^j_k\delta_{rk}\delta^j_m. \tag{9}$$

Заметим, что структурные константы (9) для GL (n, R) совпадают со структурными константами для алгебры Ли gl (n, R) [см. (1.1.13)].

§ 3. Алгебры Ли групп Ли

Отправляясь от понятия групп Ли, мы установим теперь связь с теорией алгебр Ли, изложенной в гл. 1, введя понятие алгебры Ли группы Ли G.

Пусть $T(e)$ — алгебра дифференцируемых функций класса C^1, определенных в окрестности единичной точки e, и пусть $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — кривая, представляющая гомоморфизм класса C^1 отрезка $[a, b]$ в G, такая, что $x(0) = e$. Вектор, касательный к кривой $x(t)$ в e, является отображением A: $T(e) \to R$, определенным формулой

$$Af = \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0}. \tag{1}$$

В локальной системе координат $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ окрестности точки e имеем

$$Af = \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x^j=x^j(e)} \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} a^j L_j(e) f, \tag{2}$$