Следовательно, c^i_{jk} — тензор с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами. Из формулы (7) следует также, что

1) c^i_{lk} — вещественные числа,

2) для коммутативных групп $c^i_{lk} = 0$,

$$3)\ c^i_{lk} = -c^i_{kl}, \tag{8}$$

$$4)\ c^p_{is}c^s_{jk} + c^p_{js}c^s_{ki} + c^p_{ks}c^s_{ij} = 0.$$

Последнее тождество является следствием ассоциативности группового умножения. Чтобы доказать его, прежде всего вычисляем, используя разложение (5), координаты элемента $w = x(yz)$, а затем элемента $w' = (xy)z$. Сравнивая выражения третьего порядка, получаем последнее тождество.

Пример 4. Для иллюстрации найдем структурные константы для GL (n, R). Функции композиции в этом случае (см. пример 1) совпадают с

$$z^{ij} = f^{ij}(x, y) = x^{ik}y^{kj}.$$

Следовательно, используя определения (5) и (6), получаем

$$a^{ij}_{sm,\,kr} = \left.\frac{\partial f^{ij}(x, y)}{\partial x^{sm}\partial y^{kr}}\right|_{\substack{x=e\\y=e}} = \delta^i_s\delta_{mk}\delta^j_r,$$

$$c^{ij}_{sm,\,kr} = \delta^i_s\delta_{mk}\delta^j_r - \delta^j_k\delta_{rk}\delta^j_m. \tag{9}$$

Заметим, что структурные константы (9) для GL (n, R) совпадают со структурными константами для алгебры Ли gl (n, R) [см. (1.1.13)].

§ 3. Алгебры Ли групп Ли

Отправляясь от понятия групп Ли, мы установим теперь связь с теорией алгебр Ли, изложенной в гл. 1, введя понятие алгебры Ли группы Ли G.

Пусть $T(e)$ — алгебра дифференцируемых функций класса C^1, определенных в окрестности единичной точки e, и пусть $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — кривая, представляющая гомоморфизм класса C^1 отрезка $[a, b]$ в G, такая, что $x(0) = e$. Вектор, касательный к кривой $x(t)$ в e, является отображением A: $T(e) \to R$, определенным формулой

$$Af = \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0}. \tag{1}$$

В локальной системе координат $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ окрестности точки e имеем

$$Af = \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x^j=x^j(e)} \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} a^j L_j(e) f, \tag{2}$$

где

$$L_j(e)f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x^j=x^j(e)},$$

а числа

$$a^j = \left.\frac{dx^j(t)}{dt}\right|_{t=0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

являются компонентами вектора A [см. (1.7)]. Ясно, что, согласно определению 1.3, вектор, касательный к кривой $x(t)$ в e, является касательным вектором в e. Более того, каждый касательный вектор в e может рассматриваться как вектор, касательный к кривой. Действительно, если

$$A = \sum_{j=1}^{n} a^j L_j(e)$$

есть любой касательный вектор в e, то касательный вектор к кривой

$$x^i(t) = x^i(e) + a^i t$$

в точности совпадает с $\Sigma a^j L_j(e) = A$.

Согласно теореме 1.1, касательный вектор (2) может быть представлен своими компонентами, т. е. в виде $A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$. Из теоремы 1.1 мы знаем, что касательное пространство в e является n-мерным векторным пространством. Превращаем это векторное пространство в алгебру Ли, положив

$$c^i = [A, B]^i = c^i_{jk} a^j b^k, \tag{4}$$

где структурные константы c^i_{jk} заданы формулой (2.7). Действительно, из (4) и (2.8) следует, что

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha [A, C] + \beta [B, C], \tag{5}$$

$$[A, B] = -[B, A], \tag{6}$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{7}$$

Полученная таким образом алгебра Ли называется *алгеброй Ли группы Ли G*.

Если представить элемент A алгебры Ли в некотором базисе векторного пространства L как $A = a^i X_i$, то из (4) и (5) получим

$$C = c^i_{lk} a^l b^k X_i = [a^l X_l, b^k X_k] = a^l b^k [X_l, X_k],$$

т. е.

$$[X_l, X_k] = c^i_{lk} X_i. \tag{7'}$$

Пример 1. Рассмотрим группу GL (n, R). Однопараметрические подгруппы могут быть записаны в виде

$$[g^{(ik)}(t)]^{ls} = \delta^{ls} + \delta^{li}\delta^{sk}x^{ik}(t) \tag{8}$$

(суммирований по $i, k, l, s = 1, 2, \ldots, n$ нет)

для «недиагональных» подгрупп и в виде

$$[g^{(ii)}(t)]^{ls} = \begin{cases} \delta^{ls}, & l \neq i, \\ x^{ii}(t), & l = i,\ s = i, \end{cases} \tag{9}$$

для диагональных подгрупп. Здесь индексы (i, k), $i, k = 1, 2, \ldots, n$, нумеруют различные подгруппы, а индексы l, s; $l, s = 1, 2, \ldots, n$, нумеруют матричные элементы группового элемента $g^{(ik)}(t)$. Касательный вектор $A^{(ik)}$ к кривой из (8) и (9) имеет следующие компоненты:

$$(A^{(ik)})^{ls} = a^{ik}\delta^{li}\delta^{sk}, \quad i, k, l = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где

$$a^{ik} = \left.\frac{dx^{ik}(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Формула (10) предполагает, что базисные векторы алгебры gl (n, R) заданы $n \times n$-матрицами e_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, вида

$$(e_{ik})^{ls} = \delta^{li}\delta^{sk}. \tag{11}$$

Коммутационные соотношения для базисных элементов e_{ik} следуют из (4):

$$[e_{sm}, e_{kr}] = c_{sm,\,kr}{}^{ij}e_{ij}. \tag{12}$$

Используя выражение (2.9) для структурных констант группы GL (n, R), получаем

$$[e_{sm}, e_{kr}] = \delta_{mk}e_{sr} - \delta_{rs}e_{km} \tag{13}$$

(см. пример 1.1.2).

Заметим, что произведение Ли (13) для касательных векторов e_{sm} и e_{kr} совпадает с коммутатором $[e_{sm}, e_{kr}] = e_{sm}e_{kr} - e_{kr}e_{sm}$ соответствующих матриц.

А. *Группы преобразований*

В большинстве случаев алгебры Ли появляются в теоретической физике как алгебры Ли групп преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа Ли G называется (*правой*) *группой Ли преобразований* дифференцируемого многообразия M, если каждой паре (p, x), $p \in M$, $x \in G$, соответствует элемент $q \in M$, обозначаемый через px, такой, что

1) отображение $(p, x) \to px$ произведения $M \times G$ на M дифференцируемо,

2) $pe = p$ для всех $p \in M$,

3) $(px_1)\, x_2 = p\,(x_1 x_2)$ для всех $p \in M$ и $x_1, x_2 \in G$.

Подобным образом определяется левая группа Ли преобразований $(x, p) \to xp$ многообразия M.

Говорят, что группа G *эффективна* на M, если $x = e$ — единственный элемент из G, который удовлетворяет условию $px = p$ или условию $xp = p$ соответственно для всех $p \in M$.

Найдем теперь общее выражение для генераторов однопараметрических групп преобразований.

Пусть (U, φ) — карта точки e, а (V, ψ) — карта точки $p \in M$. Условие 1 утверждает, что координаты q^i точки $q = px$ являются аналитическими функциями

$$q^i = \Phi^i (p^s, x^k), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{14}$$

координат p^s, $s = 1, 2, \ldots, m$, точки $p \in M$ и координат x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, точки $x \in G$.

Пусть ψ — аналитическая функция на M, и пусть $x^i = e^i + \lambda^i \delta t$ — координаты элемента x в бесконечно малой окрестности точки e. Используя разложение Тейлора для функции $T_x^R \psi(p) = \psi(px)$ в точке p, получаем

$$\psi(q) = \psi(p) + \lambda^i \delta t \frac{\partial \psi(q)}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial x^i}\bigg|_{x=e} + \varepsilon[(\delta t)^2]. \tag{15}$$

Производные $\left.\dfrac{\partial q^k}{\partial x^i}\right|_{x=e}$ функций композиции (14) обозначим f_i^k и вычислим приращение функции $\psi(p)$ при бесконечно малом правом сдвиге

$$\delta\psi = \psi(q) - \psi(p) = \lambda f_i^k \frac{\partial \psi(q)}{\partial q^k}\bigg|_{q=p} \delta t. \tag{16}$$

Мы здесь пренебрегли слагаемыми со степенями δt выше первой. Следовательно, операторы

$$X_i = f_i^k \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n = \dim G, \tag{17}$$

играют роль генераторов однопараметрических правых сдвигов.

Лемма 1. *Функции* $f_i^k(q) = \left.\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\right|_e$ *удовлетворяют следующему уравнению*:

$$\frac{\partial f_j^i(q)}{\partial q^a} f_k^a(q) - \frac{\partial f_k^i(q)}{\partial q^a} f_j^a(q) = c_{jk}^b f_b^i(q), \tag{18}$$

где c_{jk}^b *— структурные константы для* G.

Доказательство легко следует из утверждения 1.1 и соответствующих определений, и мы его опускаем.

В силу (1.9) имеем

$$[X, Y] = XY - YX. \tag{19}$$

Следовательно, из (18) получаем

$$[X_k, X_j] = \left(f_k^a \frac{\partial f_j^i(q)}{\partial q^a} - f_j^a \frac{\partial f_k^i(q)}{\partial q^a}\right) \frac{\partial}{\partial q^i} = c_{kj}^b f_b^i \frac{\partial}{\partial q^i} = c_{kj}^b X_b, \tag{20}$$

т. е. множество генераторов (17) замкнуто при умножении Ли (19).

Заметим, что если $M = G$, то соотношение (17) дает выражение для генераторов правых сдвигов на G:

$$T_x^R \psi(y) = \psi(yx)$$

(см. упражнение 3.1).

Подобным образом можно определить генераторы левых сдвигов на M и G.

Пример 2. Группа GL (n, R) может рассматриваться как эффективная группа преобразований на R^n. Найдем алгебру Ли группы GL (n, R), соответствующую этой реализации. Формула (14) в этом случае принимает вид

$$q^i = x^{ik} p^k. \tag{21}$$

Поэтому

$$f_{st}^i(p) = \left.\frac{\partial x^{ik} p^k}{\partial x^{st}}\right|_{x=e} = \delta^{is} p^t \tag{22}$$

и генераторы (17) однопараметрических подгрупп имеют вид

$$X_{st} = f_{st}^i(p) \frac{\partial}{\partial p^i} = \delta^{is} p^t \frac{\partial}{\partial p^i} = p^t \frac{\partial}{\partial p^s}. \tag{23}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_{sm}, X_{kr}] = \delta_{mk} X_{sr} - \delta_{rs} X_{km} \tag{24}$$

(см. (13)).

Б. *Соответствие между группами и алгебрами Ли*

Следующая теорема устанавливает соответствие между структурой групп Ли и структурой алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли, а H — подгруппа Ли в G. Через N обозначим множество всех касательных векторов в e к дифференцируемым кривым в H. Тогда*

1) *N — подалгебра в L; она является алгеброй Ли подгруппы Ли H;*

2) *если H — инвариантная подгруппа, то N — идеал в L;*

3) *если H — центральная инвариантная подгруппа, то N — центральный идеал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 1 подгруппа Ли является в то же время аналитическим подмногообразием. Поэтому подмножество N является подпространством в L. Пусть A и B — касательные вектора к кривым $x(t)$ и $y(t)$ из H. Поскольку H — подгруппа, то кривая $g(t) = x(t)\,y(t)\,x^{-1}(t)\,y^{-1}(t)$, так же как и кривая $g(\sqrt{s})$, $t = \sqrt{s}$, лежит в H. Легко проверить, что касательный вектор C к кривой $g(\sqrt{s})$ совпадает с вектором $[A, B]$, заданным соотношением (4). Поэтому касательное пространство N является линейным подпространством в L, которое замкнуто для умножения Ли, т. е. оно является подалгеброй Ли в L.

Пусть теперь H — нормальная подгруппа в G. Обозначим через $x(t)$ произвольную кривую в G с касательным вектором A, а через $y(t)$ — кривую в H с касательным вектором B. Тогда кривая $x(t)\,y(t)\,x^{-1}(t)$ лежит в H и, следовательно, кривая $q(t) = x(t)\,y(t)\,x^{-1}(t)\,y^{-1}(t)$, так же как и кривая $q(\sqrt{s})$, $t = \sqrt{s}$, лежит в H. Вектор $C = [A, B]$, $A \in L$, $B \in N$, является касательным к кривой $q(\sqrt{s})$. Поэтому C лежит в N и, следовательно, N — идеал в L.

В случае когда H — центральная инвариантная подгруппа, кривая $q(t)$ сводится к точке e и, следовательно, касательный вектор C является нулем, т. е. N — центральный идеал в L.

Мы видим, что группа Ли определяет алгебру Ли с точностью до изоморфизма. Следующая теорема дает ответ на обратный вопрос: в какой мере алгебра Ли L определяет группу Ли?

ТЕОРЕМА 3. *Каждая подалгебра алгебры Ли L группы Ли G является алгеброй Ли в точности одной связной подгруппы Ли в G. Две группы Ли локально изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли изоморфны.*

(Доказательство см. в [390], гл. II, § 1 и § 2.)

В. *Группы Ли с изоморфными алгебрами Ли*

Мы можем также дать связь между глобальными группами Ли, имеющими изоморфные алгебры Ли. Действительно, пусть Г — класс всех связных групп Ли, имеющих изоморфные алгебры Ли. Тогда, согласно теореме *3*, любые две группы класса Г локально изоморфны. Более того, в виду теоремы 2.4.2 в классе Г существует с точностью до изоморфизма одна и только одна односвязная группа $\tilde{G}$, которую называют *универсальной накрывающей группой* класса Г. Любая группа класса Г является фактор-группой $\tilde{G}/N$, где N — дискретная центральная инвариантная подгруппа.

Заметим, что группы класса Г, будучи локально изоморфными, могут быть совсем различны глобально. Простейшим примером этому является группа вращений SO (2) и группа трансляций T^1. Эти группы локально изоморфны, так как их алгебры Ли изоморфны. Однако как глобальные группы они совершенно различны; именно, SO (2) — компактная и бесконечно связная группа, тогда как T^1 — некомпактная и односвязна (см. теорему 2.4.2). Между этими группами существует соотношение

$$\mathrm{SO}(2) = T^1/N, \tag{25}$$

где дискретная центральная инвариантная подгруппа N совпадает с подгруппой всех целых чисел.

Другой пример: SU (2) односвязна, SO (3) двусвязна; они имеют изоморфные алгебры Ли, и $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/Z_2$, где Z_2 — дискретный центр в SU (2): $Z_2 = (e, -e)$.

Г. *Присоединенная группа*

Рассмотрим теперь группу Ли G и обозначим через L ее алгебру Ли. При фиксированном $x \in G$ отображение

$$\psi_x(y) = xyx^{-1} \tag{26}$$

определяет автоморфизм группы G.

Автоморфизмы вида (26) называются *внутренними автоморфизмами* группы G. Любой другой автоморфизм называется *внешним автоморфизмом* группы G. Каждому автоморфизму группы G соответствует автоморфизм алгебры Ли L. Мы можем вычислить явный вид индуцированного автоморфизма l_x алгебры L путем введения системы координат на G. Так как

$$y'_x = \psi_x(y) = (xyx^{-1}y^{-1})\,y,$$

то, используя координаты произведения $xyx^{-1}y^{-1}$, получаем

$$y'^i_x = c^i_{lk}x^l y^k + y^i + \varepsilon^i = (c^i_{lk}x^l + \delta^i_k)\,y^k + \varepsilon^i, \tag{27}$$

где ε^i имеют третий порядок малости относительно координат элементов x и y. Явный вид автоморфизма l_x алгебры L может быть вычислен, исходя из определения касательного вектора к однопараметрической подгруппе $y^i(t)$. Дифференцируя обе части соотношения (27), получаем при $t = 0$

$$a'^i = c^i_{lk} x^l a^k, \tag{28}$$

где

$$a^i = \mathrm{d}y^i/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$$

— координаты вектора $A = a_i X^i \in L$ в базисе X_i алгебры L. Тогда автоморфизм l_x алгебры Ли L имеет вид

$$(l_x)^i_k = c^i_{lk} x^l, \tag{29}$$

где x^l, $l = 1, 2, \ldots, n$, — координаты элемента $x \in G$. Отображение h: $x \to l_x$ является гомоморфизмом из G в группу G_A всех автоморфизмов алгебры L. Очевидно, что ядро этого гомоморфизма совпадает с центром в G. Автоморфизмы (29) алгебры L, индуцированные внутренними автоморфизмами (26) группы G, называются *внутренними автоморфизмами* алгебры L. Все другие автоморфизмы алгебры L называются *внешними автоморфизмами*. Группа G_a всех внутренних автоморфизмов (29) алгебры L называется *присоединенной группой*. Покажем теперь, что алгебра Ли присоединенной группы G_a является *присоединенной алгеброй* L_a. Действительно, взяв однопараметрическую подгруппу $l_{x(t)}$, из (29) находим, что координатами генератора

$$P = \mathrm{d}l_{x(t)}/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$$

являются

$$P^i_k = c^i_{lk} b^l, \quad \text{где} \quad b^l = \mathrm{d}x^l/\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Положив $B = \Sigma b^i X_i$, находим

$$P = \mathrm{ad}\,B, \quad \text{или} \quad P(A) = \mathrm{ad}\,B(A) = [B, A], \tag{31}$$

т. е. $P \in L_a$. Размерность алгебры Ли $\tilde{L}_a$ касательных векторов к однопараметрическим подгруппам внутренних автоморфизмов равна размерности присоединенной алгебры L_a. Поэтому $\tilde{L}_a$ совпадает с L_a. По этой причине L_a также называется *алгеброй внутренних дифференцирований*.

Д. *Левоинвариантная и правоинвариантная алгебры Ли*

Пусть G — группа Ли. Пусть Ω_{g_0} — отображение из G на G, заданное левыми сдвигами Ω_{g_0}: $g \to g_0 g$. Из определения 2.1 группы Ли следует, что Ω_{g_0} — аналитический изоморфизм из G на

G. Пусть $d\Omega_{g_0}$ обозначает дифференциал изоморфизма Ω_{g_0}, определенный в § 1, Б. Из § 1, Б следует, что $d\Omega_{g_0}$ переводит касательное пространство L_e в единице e в касательное пространство L_{g_0} в g_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторное поле $X = \{X_g,\ g \in G\}$ на G называют *левоинвариантным*, если для любых $g,\ g' \in G$

$$d\Omega_{g'g^{-1}} X_g = X_{g'}. \tag{32}$$

Множество всех левоинвариантных векторных полей на G образует алгебру Ли. Действительно, если X и Y — любые два левоинвариантные поля, то очевидно, что $\alpha X + \beta Y$ также левоинвариантно; более того, в силу утверждения 1.2 имеем

$$d\Omega_{g'g^{-1}}([X,\ Y_g]) = [d\Omega_{g'g^{-1}}(X),\ d\Omega_{g'g^{-1}}(Y)] = [X, Y]_{g'}, \tag{33}$$

т. е. $[X,\ Y]$ также левоинвариантно. Левоинвариантная алгебра Ли порождается правыми сдвигами и, согласно теореме 1.1, реализуется дифференциальными операторами первого порядка. Обозначаем эту алгебру Ли через L^R.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Каждое левоинвариантное векторное поле аналитично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V_1 — окрестность произвольной точки $g_0 \in G$, и пусть $\{t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\}$ — система координат на G в окрестности точки g_0. Существует окрестность V_2 точки g_0, такая, что условие $g,\ h \in V_2$ предполагает, что $gg_0h^{-1} \in V_1$. Для $g \in G$ из (1), (1.17) и (1.19) получаем

$$X_g t_i = \left(d\Omega_{gg_0^{-1}} X_{g_0}\right) t_i = X_{g_0}\left(t_i \circ \Omega_{gg_0^{-1}}\right). \tag{34}$$

Поэтому координаты $t_i'(g,\ h) \equiv t_i(gg_0^{-1}h)$ аналитичны на $V_2 \times V_2$; следовательно, $t_i'(g,\ h) = f_i(t_1(g),\ \ldots,\ t_n(g);\ t_1(h),\ \ldots$ $\ldots,\ t_n(h))$, где функции $f_i(y_1,\ \ldots,\ y_n;\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$ аналитичны по всем $2n$ аргументам в окрестности множества значений $y_k = t_k(g_0)$, $z_k = t_k(g_0)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Мы получаем

$$X_g t_i = (X_{g_0} t_j)\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)\Big|_{g,\ g_0}, \tag{35}$$

где индексы $g,\ g_0$ означают, что частные производные взяты при $y_k = t_k(g)$, $z_k = t_k(g_0)$. Теперь, согласно теореме 1.1, величины $X_{g_0} t_j$ являются константами и $(\partial f_i/\partial z_j)|_{g,\ g_0}$, рассматриваемая как функция от g, аналитична в g_0. Поэтому функции $X_g t_i$ аналитичны в g_0 и, следовательно, векторное поле $X = \{X_g,\ g \in G\}$ также аналитично.

Утверждение 4 предполагает, что левоинвариантная алгебра Ли L^R группы G состоит из аналитических векторных полей на G,

Аналогично можем ввести также правоинвариантные векторные поля и показать, что они аналитичны и образуют правоинвариантную алгебру Ли L^L.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Левоинвариантная и правоинвариантная алгебры Ли изоморфны. Этот изоморфизм аналитичен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{J}$ — отображение $g \to g^{-1}$ группы G на себя. Ясно, что, согласно определению 2.1, $\mathcal{J}$ — аналитический изоморфизм. Пусть X — любое левоинвариантное векторное поле, и пусть $Y_g = \mathrm{d}\mathcal{J} X_{g^{-1}}$. Тогда Y правоинвариантно. Действительно, обозначая правые инфинитезимальные сдвиги на G через $\mathrm{d}\Sigma$, имеем

$$\mathrm{d}\Sigma_g Y_e = \mathrm{d}\Sigma_g (\mathrm{d}\mathcal{J} X_e) = \mathrm{d}(\Sigma_g \circ \mathcal{J}) X_e. \tag{36}$$

Так как $(\Sigma_g \circ \mathcal{J})$ отображает g_0 в $g_0^{-1}g = (g^{-1}g_0)^{-1}$, имеем $\Sigma_g \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ \Sigma_{g^{-1}}$. Следовательно,

$$\mathrm{d}\Sigma_g Y_e = \mathrm{d}\mathcal{J} (\mathrm{d}\Omega_{g^{-1}} X_e) = \mathrm{d}\mathcal{J} (X_{g^{-1}}) = Y_g. \tag{37}$$

Наконец, для произвольного g_0 имеем

$$\mathrm{d}\Sigma_{g_0 g^{-1}} Y_g = \mathrm{d}\Sigma_{g_0 g^{-1}} (\mathrm{d}\Sigma_g Y_e) = \mathrm{d}(\Sigma_{g_0 g^{-1}} \circ \Sigma_g) Y_e =$$
$$= \mathrm{d}\Sigma_{g_0} Y_e = Y_{g_0}, \tag{38}$$

т. е. Y правоинвариантно. Поскольку отображение $\mathcal{J}$ аналитично, изоморфизм $\mathrm{d}\mathcal{J}$ также аналитичен.

Теорема 1.1 предполагает, что правоинвариантная алгебра Ли может быть представлена дифференциальными операторами первого порядка, т. е. для $\tilde{X} \in L^L$ имеем

$$\tilde{X}_g = a^k (g(t)) \frac{\partial}{\partial t^k}, \tag{39}$$

где $t^k(g)$ — координаты элемента $g \in G$.

Аналогично элемент $\tilde{\tilde{Y}}$ из L^R, сопоставляемый с правыми сдвигами (т. е. из левоинвариантной алгебры Ли), имеет вид

$$\tilde{\tilde{Y}}_g = b^k (g(t)) \frac{\partial}{\partial t^k}. \tag{40}$$

Ввиду утверждения 1 все функции $a^k(g)$ и $b^k(g)$, $k = 1, 2, \ldots, \dim G$, аналитичны на G. Более того, ввиду утверждения 2 функция $b^k(g)$ может быть выражена через $a^k(g)$ или, обратно, с помощью аналитического преобразования, определенного по $\mathrm{d}\mathcal{J}$.

Е. *Тождества в алгебрах Ли*

Пусть L — вещественная алгебра Ли, а G — соответствующая связная односвязная вещественная группа Ли. В этом разделе мы выводим два тождества в алгебре Ли, содержащие элементы,

их преобразования при внутренних автоморфизмах, определенных элементами из G, и производные локальных координат второго рода относительно некоторого параметра.

Как известно, экспоненциальная функция e^x реализует некоторую открытую окрестность единицы в G, если x пробегает некоторую открытую окрестность V нулевой точки в L. Если $x_1, \ldots, x_r$ — базис в L, то V может быть выбрано достаточно малым, так что для любого $x \in V$ имеем $e^x = e^{t_1x_1}\ldots e^{t_rx_r}$ (координаты второго рода), причем $e^x \to (t_1, \ldots, t_r)$ является локальной картой в G для некоторой окрестности W единицы, содержащейся в e^V. Кроме того, мы можем предположить, что W выпукла, т. е. такая, что если e^y и e^xe^y лежат в W, то $e^{tx}e^y \in W$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$; это следует из того факта (см. [390], стр. 34 и 92—94), что отображения $t \to e^{tx}e^y$ являются геодезическими для связности Картана — Скоутена.

Таким образом, если $e^x \in W$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $e^{tx} = e^{t_1x_1}\ldots e^{t_rx_r}$, где координаты t_i аналитичны по t.

Чтобы упростить обозначения, мы предположим (используя, например, теорему Адо), что алгебра Ли L точно реализована в виде матричной алгебры. Таким образом, некоторая окрестность единицы в G, содержащая W (и все произведения элементов из W, необходимые ниже), будет реализована как окрестность матричной группы.

Следовательно, из тождества

$$\frac{d}{dt}e^{tx} = xe^{tx} = e^{tx}x =$$

$$= \left(\frac{dt_1}{dt}x_1 + \cdots + \frac{dt_r}{dt}e^{t_1x_1}\ldots e^{t_{r-1}x_{r-1}}x_re^{-t_{r-1}x_{r-1}}\ldots e^{-t_1x_1}\right)e^{tx} =$$

$$= e^{tx}\left(e^{-t_rx_r}\ldots e^{-t_2x_2}x_1\frac{dt_1}{dt}e^{t_2x_2}\ldots e^{t_rx_r} + \cdots + x_r\frac{dt_r}{dt}\right)$$

находим

$$x = \frac{dt_1}{dt}x_1 + \cdots + \frac{dt_r}{dt}\operatorname{Int}(t_1x_1)\ldots\operatorname{Int}(t_{r-1}x_{r-1})x_r,$$

$$x = \operatorname{Int}(-t_rx_r)\ldots\operatorname{Int}(-t_2x_2)x_1\frac{dt_1}{dt} + \cdots + x_r\frac{dt_r}{dt}, \quad (41)$$

где $\operatorname{Int}(tx)$ обозначает внутренний автоморфизм $\operatorname{Ad}(e^{tx})$ алгебры L, определенный в любой реализации как $y \to e^{tx}ye^{-tx}$.

Более того, если $x, y \in L$ и e^y, $e^x e^y \in W$, то, как мы видели, для $0 \leqslant t \leqslant 1$ $e^{tx}e^y \in W$. Тогда мы можем записать

$$e^{tx}e^y = e^{\alpha_1 x_1} \ldots e^{\alpha_r x_r}, \quad e^y = e^{\beta_1 x_1} \ldots e^{\beta_r x_r},$$

и из тождества

$$\frac{d}{dt}\left((e^{tx}e^y)\,e^{-y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha_1 x_1} \ldots e^{\alpha_r x_r} e^{-\beta_r x_r} \ldots e^{-\beta_1 x_1}\right) =$$

$$= \left(x_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \cdots + e^{\alpha_1 x_1} \ldots e^{\alpha_{r-1} x_{r-1}} x_r \frac{d\alpha_r}{dt} e^{-\alpha_{r-1} x_{r-1}} \ldots e^{-\alpha_1 x_1}\right) e^{tx}$$

выводим соотношение

$$x = \frac{d\alpha_1}{dt} x_1 + \cdots + \frac{d\alpha_r}{dt} \operatorname{Int}(\alpha_1 x_1) \ldots \operatorname{Int}(\alpha_{r-1} x_{r-1})\, x_r. \tag{42}$$

В дополнение, как хорошо известно, для всех $x, y \in L$ и $t \in R$ мы имеем

$$e^{tx} y e^{-tx} = \operatorname{Int}(tx)\, y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad}(tx))^n y. \tag{43}$$

§ 4. Прямое и полупрямое произведения

С помощью прямого и полупрямого произведений групп мы можем строить новые группы из заданных групп и сводить исследование некоторых более сложных групп к исследованию более простых подгрупп.

А. *Прямое произведение*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G_1 и G_2 — абстрактные группы. Группа всех упорядоченных пар (g_1, g_2), $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, с законом умножения

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2') \tag{1}$$

является *прямым произведением* $G_1 \otimes G_2$. Элемент $e = (e_1, e_2)$ — единица группы $G_1 \times G_2$, а $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$ — элемент, обратный (g_1, g_2).

Подгруппа $\tilde{G}_1$ группы $G_1 \times G_2$, состоящая из всех пар вида (g_1, e_2), является инвариантной подгруппой в $G_1 \times G_2$, изоморфной G_1. Действительно, для любого (g_1, e_2) и $(g_1', g_2') \in G_1 \times G_2$ имеем

$$(g_1', g_2')^{-1} (g_1, e_2)(g_1', g_2') = (g_1'^{-1} g_1 g_1', e_2) \in \tilde{G}_1.$$