Формула (10) может быть записана как матричное произведение, если мы представим (a, Λ) в виде

$$(a, \Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Пример 2. Пусть R^3 — евклидово пространство, R — вращение, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ — 3-векторы, а b — вещественное число. Преобразование Галилея $g = (b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}, \\ t' &= t + b. \end{aligned} \tag{12}$$

Это определение имеет в виду следующий закон композиции для группы Галилея:

$$\begin{aligned} &(b', \boldsymbol{a}', \boldsymbol{v}', R')(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R) = \\ &= (b' + b, \boldsymbol{a}' + R'\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}' + R'\boldsymbol{v}, R'R), \end{aligned} \tag{13}$$

который является законом композиции типа полупрямого произведения. Он может быть записан как матричное произведение, если представить $(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R)$ в виде

$$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Обратным к элементу g является $(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R)^{-1} = (-b, R^{-1}(\boldsymbol{a} - b\boldsymbol{v}), -R^{-1}\boldsymbol{v}, R^{-1})$. Эти формулы получаются из соответствующих преобразований Пуанкаре из предыдущего примера путем предельного перехода ($x_0 \equiv ct$):

$$\begin{aligned} &\Lambda_{0i} \to 0,\ c \to \infty \quad \text{так, чтобы } \Lambda_{0i}c \to v_i, \\ &a_0 \to \infty,\ c \to \infty \quad \text{так, чтобы } a_0/c \to b. \end{aligned} \tag{15}$$

Предельному переходу (15) в алгебре Ли соответствует контракция, введенная в гл. 1, § 8, пример 2.

§ 5. Разложение Леви—Мальцева

А. *Разрешимые, нильпотентные, простые и полупростые группы Ли*

Пусть G — абстрактная группа. Сопоставим каждой паре элементов $x, y \in G$ элемент $q = xyx^{-1}y^{-1}$, который называется *коммутатором* элементов x и y. Множество Q всех элементов $g \in G$, которые представляются в виде $g = q_1q_2 \ldots q_m$, где каждое q_i является коммутатором двух элементов $x_i, y_i \in G$, называется *коммутантом* группы G. Коммутант D является инвариантной подгруппой в G. Действительно, произведение элементов $q = q_1q_2 \ldots$

... q_n и $q' = q_1'q_2' \ldots q_m'$ является элементом из Q, и обратный элемент $q^{-1} = q_n^{-1} \ldots q_1^{-1}$ к q также элемент из Q. Более того, если $g \in G$ и $q = q_1q_2 \ldots q_n \in Q$, то

$$g^{-1}qg = \prod_{i=1}^{n} g^{-1}q_i g = \prod_{i=1}^{n} g^{-1}x_i g g^{-1}y_i g g^{-1}x_i^{-1} g g^{-1}y_i g \in Q,$$

т. е. Q — нормальная подгруппа в G. Однако в общем случае Q не является топологической подгруппой (см. определение 2.2.2).

Взяв замыкание коммутанта Q в топологии группы G, получаем нормальную топологическую подгруппу.

Фактор-группа G/Q абелева. Действительно, если $x, y \in G$, а $X = xQ$ и $Y = yQ$ — любые два элемента из G/Q, то

$$XYX^{-1}Y^{-1} = xQyQx^{-1}Qy^{-1}Q = xyx^{-1}y^{-1}Q = qQ = Q \simeq e \in G/Q,$$

т. е. G/Q коммутативна.

Рассмотрим теперь цепочку коммутантов

$$G = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_{n-1} \supset Q_n \supset \ldots, \tag{1}$$

где каждое Q_n — коммутант для Q_{n-1}. Если для некоторого m $Q_m = \{e\}$, то говорят, что группа G *разрешима*. Если H — подгруппа разрешимой группы G, то для n-го коммутанта для H имеем $(Q_H)_n \subset Q_n$. Поэтому каждая подгруппа разрешимой группы разрешима. Разрешимые группы всегда имеют коммутативные инвариантные подгруппы. Действительно, если $Q_m = \{e\}$, но $Q_{m-1} \neq \{e\}$, то для любой пары $x, y \in Q_{m-1}$ имеем $xyx^{-1}y^{-1} = e$, т. е. $xy = yx$.

Пример 1. Пусть G — группа движений евклидовой плоскости R^2. Каждый элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = (a, \Lambda)$, где a — элемент группы трансляций T^2, а Λ — элемент группы вращений SO (2). Групповое умножение задается формулой (см. пример 4.1)

$$(a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda\Lambda'), \tag{2}$$

т. е. группа движений R^2 — полупрямое произведение $T^2 \rtimes$ SO (2).

Согласно (4.7) и (2), коммутатор элементов $x = (a, \Lambda)$ и $y = (a', \Lambda')$ совпадает с

$$q = (a, \Lambda)(a', \Lambda')(a, \Lambda)^{-1}(a', \Lambda')^{-1} = (a + \Lambda a' - a' - \Lambda' a, I) \in T^2.$$

Поэтому $Q_1 = T^2$, $Q_2 = (0\ I) = e$, т. е. группа $T^2 \rtimes$ SO (2) разрешима.

Теорема 1. *Каждая разрешимая связная группа Ли может быть представлена в виде произведения*

$$G = T_1T_2 \ldots T_m$$

однопараметрических подгрупп T_i, где для любого k, $1 \leqslant k < m$, множество

$$G_k = T_{k+1}T_{k+2}\ldots T_m$$

является нормальной подгруппой в G.

Доказательство прямо следует из теоремы 1.2.2, и мы оставляем его читателю как упражнение.

Пусть K — множество всех элементов, порожденных коммутаторами

$$q = xyx^{-1}y^{-1}, \quad x \in Q, \quad y \in G.$$

Как и в предыдущем случае, легко проверить, что K — инвариантная подгруппа в G. Рассмотрим последовательность инвариантных подгрупп

$$G = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_{n-1} \supset K_n \supset \ldots, \tag{3}$$

где K_{n+1} — подгруппа в G, порожденная коммутаторами $q = xyx^{-1}y^{-1}$, $x \in K_n$, $y \in G$. Если при некотором m $K_m = \{e\}$, то говорят, что группа G нильпотентна. Из определения следует, что подгруппа нильпотентной группы *нильпотентна*. Более того, так как $K_n \supset Q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то каждая нильпотентная группа разрешима.

Каждая нильпотентная группа имеет нетривиальный центр. Действительно, если $K_m = \{e\}$, но $K_{m-1} \neq 0$, то для любых $x \in K_{m-1}$ и $y \in G$ имеем $xyx^{-1}y^{-1} = e$, т. е. $xy = yx$.

Группа Ли *нильпотентна*, если она нильпотентна, как абстрактная группа.

Группа Ли *проста*, если она не имеет собственных связных инвариантных подгрупп Ли. Подчеркнем, что в противоположность к простым конечным группам простая группа Ли может содержать *дискретную* инвариантную подгруппу. Например, группа SU (n) имеет дискретную циклическую инвариантную подгруппу Z_n порядка n, порожденную элементом

$$g = \exp\left[\frac{2\pi i}{n}\right]e, \quad e \in \mathrm{SU}\,(n). \tag{4}$$

Однако все группы $G_i = \mathrm{SU}\,(n)/Z_i$, где Z_i — подгруппа в Z_n, рассматриваются согласно определения как простые группы Ли.

Группа Ли *полупроста*, если она не содержит собственной инвариантной связной абелевой подгруппы Ли.

Б. *Разложение Леви—Мальцева*

Разрешимые и полупростые группы образуют два непересекающиеся класса. Действительно, каждая разрешимая группа Ли содержит инвариантную абелеву подгруппу, тогда как полупро-

стая группа Ли не содержит такой. Теория групп Ли может быть сведена в некотором смысле к исследованию свойств разрешимых и полупростых групп. Действительно, имеет место

ТЕОРЕМА 1 (теорема Леви—Мальцева). *Каждая связная группа Ли G локально изоморфна полупрямому произведению*

$$N \rtimes S, \tag{5}$$

где N — связная максимальная разрешимая инвариантная подгруппа в G, а S — связная полупростая подгруппа в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — алгебра Ли группы G. В силу теоремы 1.3.5 Леви—Мальцева L — полупрямая сумма $\tilde{N} \dotplus \tilde{S}$ радикала $\tilde{N}$ и полупростой подалгебры Ли $\tilde{S}$. Пусть $N \rtimes S$ обозначает связную группу Ли с алгеброй Ли $\tilde{N} \dotplus \tilde{S}$, где N и S — связные подгруппы, соответствующие $\tilde{N}$ и $\tilde{S}$ соответственно (см. теорему 3.3). Тогда, согласно теореме 3.3, G и $N \rtimes S$ локально изоморфны.

§ 6. Разложения Гаусса, Картана, Ивасавы и Брюа

В гл. 1, § 6, мы рассмотрели разложения Гаусса, Картана и Ивасавы для алгебр Ли. Теперь мы дадим соответствующие глобальные разложения для групп Ли.

А. *Разложение Гаусса*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическая группа G допускает разложение Гаусса, если G содержит подгруппы $\mathfrak{Z}$, D и Z, удовлетворяющие условиям:

1° Множества $\mathfrak{Z}D$ и DZ являются разрешимыми связными подгруппами в G, коммутанты которых совпадают с $\mathfrak{Z}$ и Z соответственно.

2° Пересечения $\mathfrak{Z} \cap DZ$ и $D \cap Z$ состоят только из единичного элемента и множество $\mathfrak{Z}DZ$ плотно в G.

Из первого условия следует, что D — абелева подгруппа, а $\mathfrak{Z}$ и Z — разрешимы и связны. Второе условие означает, что почти каждый элемент $g \in G$ имеет разложение вида

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{1}$$

и если такое разложение существует, то оно единственно. Элемент $g \in G$ называется *регулярным*, если он допускает разложение (1), и *сингулярным* в противном случае.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая связная полупростая комплексная группа Ли G допускает разложение Гаусса*

$$G = \overline{\mathfrak{Z}DZ}, \tag{2}$$