стая группа Ли не содержит такой. Теория групп Ли может быть сведена в некотором смысле к исследованию свойств разрешимых и полупростых групп. Действительно, имеет место

ТЕОРЕМА 1 (теорема Леви—Мальцева). *Каждая связная группа Ли G локально изоморфна полупрямому произведению*

$$N \rtimes S, \tag{5}$$

где N — связная максимальная разрешимая инвариантная подгруппа в G, а S — связная полупростая подгруппа в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — алгебра Ли группы G. В силу теоремы 1.3.5 Леви—Мальцева L — полупрямая сумма $\tilde{N} \dotplus \tilde{S}$ радикала $\tilde{N}$ и полупростой подалгебры Ли $\tilde{S}$. Пусть $N \rtimes S$ обозначает связную группу Ли с алгеброй Ли $\tilde{N} \dotplus \tilde{S}$, где N и S — связные подгруппы, соответствующие $\tilde{N}$ и $\tilde{S}$ соответственно (см. теорему 3.3). Тогда, согласно теореме 3.3, G и $N \rtimes S$ локально изоморфны.

§ 6. Разложения Гаусса, Картана, Ивасавы и Брюа

В гл. 1, § 6, мы рассмотрели разложения Гаусса, Картана и Ивасавы для алгебр Ли. Теперь мы дадим соответствующие глобальные разложения для групп Ли.

А. *Разложение Гаусса*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическая группа G допускает разложение Гаусса, если G содержит подгруппы $\mathfrak{Z}$, D и Z, удовлетворяющие условиям:

1° Множества $\mathfrak{Z}D$ и DZ являются разрешимыми связными подгруппами в G, коммутанты которых совпадают с $\mathfrak{Z}$ и Z соответственно.

2° Пересечения $\mathfrak{Z} \cap DZ$ и $D \cap Z$ состоят только из единичного элемента и множество $\mathfrak{Z}DZ$ плотно в G.

Из первого условия следует, что D — абелева подгруппа, а $\mathfrak{Z}$ и Z — разрешимы и связны. Второе условие означает, что почти каждый элемент $g \in G$ имеет разложение вида

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{1}$$

и если такое разложение существует, то оно единственно. Элемент $g \in G$ называется *регулярным*, если он допускает разложение (1), и *сингулярным* в противном случае.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая связная полупростая комплексная группа Ли G допускает разложение Гаусса*

$$G = \overline{\mathfrak{Z}DZ}, \tag{2}$$

где абелева группа D связна, а группы $\mathfrak{Z}$ и Z односвязны и нильпотентны; $\mathfrak{Z}D$ и DZ — максимальные связные разрешимые подгруппы в G. Множество сингулярных точек (дополнение к $\mathfrak{Z}DZ$) замкнуто и имеет меньшую размерность, чем G; компоненты ζ, δ и z регулярной точки $g \in \mathfrak{Z}DZ$ являются непрерывными функциями от g.

Два разложения этого типа связаны автоморфизмом группы G. (Доказательство см. в [875], § 5.)

Проиллюстрируем эту теорему примером группы SL (2, C), которая является накрывающей группой однородной группы Лоренца.

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$. Пусть $\mathfrak{Z}$, D и Z — подгруппы в SL (2, C), состоящие из матриц вида

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

соответственно. Для простоты мы обозначили матрицы и соответствующие им комплексные числа одинаковыми буквами. Группа D изоморфна мультипликативной группе комплексных чисел, а каждая из подгрупп $\mathfrak{Z}$ и Z изоморфна аддитивной группе комплексных чисел. Сравнивая произведение $\zeta\delta z$ и матрицу

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, C), \quad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1,$$

проверяем, что каждый элемент $g \in \mathrm{SL}(2, C)$, для которого $g_{22} \neq 0$, имеет единственное разложение вида

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{4}$$

где компоненты ζ, δ и z определяются по формулам

$$\zeta = \frac{g_{12}}{g_{22}}, \quad \delta = g_{22}, \quad z = \frac{g_{21}}{g_{22}}. \tag{5}$$

Пусть $S = DZ$; тогда для коммутантов имеем

$$S^{(1)} = Z, \quad S^{(2)} = Z^{(1)} = \{e\}.$$

Следовательно, S — разрешимая группа. Подобным образом проверяется, что $K = \mathfrak{Z}D$ разрешима. Обе подгруппы связны, так как каждый элемент из S или K может быть достигнут непрерывно из единичного элемента. Множество матриц вида (4) плотно в SL (2, C), так как его дополнение, определенное условием $g_{22} = 0$, имеет меньшую размерность, чем SL (2, C). Следовательно, разложение (4) представляет собой разложение Гаусса для SL (2, C).

Замечание. Если мы предположим, что абелева подгруппа D состоит из диагональных матриц вида

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

то, согласно определению 1, $\mathfrak{Z}DZ$ дает разложение Гаусса группы GL (2, C).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $G = \mathrm{SL}\,(n, C)$, *и пусть* $\mathfrak{Z}$, D *и* Z — *подгруппы в* G, *элементы которых имеют вид*

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \cdots & \zeta_{1n} \\ & 1 & \zeta_{23} & \cdots & \zeta_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & 1 & \zeta_{n-1,\,n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & 0 \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & \delta_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ z_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда разложение

$$G = \overline{\mathfrak{Z}DZ} \tag{8}$$

и разложение

$$G = \overline{ZD\mathfrak{Z}} \tag{9}$$

являются разложениями Гаусса для SL (n, C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что для почти каждого элемента $g \in \mathrm{SL}\,(n, C)$ существует элемент $z \in Z$, такой, что $gz \in K$, где K — подгруппа всех верхних треугольных матриц с единичным детерминантом. Действительно, из определения подгруппы K следует, что все матричные элементы в gz под главной диагональю должны равняться нулю. Более того, $z_{pq} = 0$ для $p < q$ и $z_{pp} = 1$. Следовательно, условие $gz \in K$ эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_{s=q}^{n} q_{ps} z_{sq} = 0 \quad \text{для} \quad p > q,$$

т. е. системе

$$\sum_{s=q+1}^{n} q_{ps} z_{sq} = -g_{pq}, \quad p = q+1, \ldots, n. \tag{10}$$

При фиксированном q определитель, составленный из коэффициентов системы (10), совпадает с минором g_{q+1} вида

$$g_{q+1} = \begin{vmatrix} g_{q+1,\,q+1} & \cdots & g_{q+1,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n,\,q+1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Следовательно, если g_{q+1} не равно нулю, то система (10) имеет решение относительно z_{sq}. Таким образом, почти все элементы $g \in \mathrm{SL}\,(n,\,C)$ могут быть представлены в виде $g = kz$. Теперь каждый элемент $k \in K$ однозначно представляется в виде

$$k = \zeta\delta, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D. \tag{12}$$

Действительно, равенство (12) означает, что

$$k_{pq} = \zeta_{pq}\delta_q \quad \text{(суммирование отсутствует)}. \tag{13}$$

В частности, для $p = q$ $\zeta_{pp} = 1$. Поэтому

$$\delta_p = k_{pp}, \quad \zeta_{pq} = \frac{k_{pq}}{k_{pp}}. \tag{14}$$

Таким образом, каждый элемент $g \in \mathrm{SL}\,(n,\,C)$, для которого миноры (11) при $q = 1, 2, \ldots, n-1$ не обращаются в нуль, имеет разложение вида

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z. \tag{15}$$

Множество сингулярных точек, для которых по крайней мере один минор (11) обращается в нуль, имеет размерность меньшую, чем размерность группы $\mathrm{SL}\,(n,\,C)$. Следовательно, его дополнение $\mathfrak{Z}DZ$ плотно в G. Итак, разложение (8) доказано. Легко проверить, что подгруппы $\mathfrak{Z}$, D, Z, $\mathfrak{Z}D$ и DZ обладают всеми свойствами, сформулированными в теореме 1. Поэтому (8) дает желанное разложение Гаусса для $\mathrm{SL}\,(n,\,C)$.

Разложение (9) выводится подобным же образом.

Замечание. Явный вид непрерывных функций $\zeta\,(g)$, $\delta\,(g)$ и $z\,(g)$ дан в упражнениях 11.6.1 и 11.6.2.

Компактные полупростые группы Ли не допускают разложения Гаусса, поскольку они не имеют разрешимых подгрупп. Однако для некомпактных полупростых вещественных групп Ли существуют некоторые аналоги разложения Гаусса. Действительно, имеет место

Теорема 3. *Каждая связная полупростая вещественная группа Ли G допускает разложение*

$$G = \overline{\mathfrak{Z}DZ},$$

где D — прямое произведение

$$D = A \otimes K$$

односвязной абелевой группы A и связной полупростой компактной группы K, а группы $\mathfrak{Z}$ и Z нильпотентны и односвязны.

Множество сингулярных точек (дополнение к $\mathfrak{Z}DZ$) замкнуто и имеет размерность, меньшую чем G. В разложении регулярной точки $g = \zeta\delta z$ все компоненты ζ, δ и z являются непрерывными функциями от g.

(Доказательство см. в [875], § 6.)

Б. *Разложение Картана*

Пусть L — вещественная полупростая алгебра Ли, и пусть

$$L = K \dotplus P \tag{16}$$

— ее разложение Картана (см. теорему 1.6.9). Существует глобальный вариант этого разложения, который описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть G — связная полупростая группа Ли с конечным центром. Алгебра Ли L группы G имеет разложение Картана* (16). *Пусть $\mathcal{K}$ — связная подгруппа в G, алгебра Ли которой совпадает с K, и пусть $\mathcal{P}$ — образ векторного пространства P при экспоненциальном отображении. Тогда*

$$G = \overline{\mathcal{P}\mathcal{K}}. \tag{17}$$

(Доказательство см. в [167].)

Пример 2. Пусть $G = \mathrm{SL}(n, R)$. Разложение Картана алгебры Ли L группы G является разложением произвольной матрицы с нулевым следом в сумму кососимметрической матрицы и симметрической матрицы с нулевым следом (см. пример 1.6.2). Связная подгруппа $\mathcal{K}$ группы G, алгебра Ли которой совпадает с K, состоит из ортогональных матриц. С другой стороны, множество $\mathcal{P}$ является множеством унимодулярных эрмитовых матриц. Поэтому глобальное разложение (17) в настоящем случае совпадает с хорошо известным полярным разложением унимодулярной матрицы в произведение ее эрмитовой и ортогональной частей.

В. *Разложение Ивасавы*

Пусть L — вещественная полупростая алгебра Ли, и пусть

$$L = K \dotplus H_p \dotplus N_0 \tag{18}$$

— ее разложение Ивасавы (см. теорему 1.6.3). Глобальный вариант разложения (18) описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть G — связная группа с алгеброй Ли L, и пусть $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{N}$ — связные подгруппы в G, соответствующие подалгебрам K, H_p и N_0 соответственно. Тогда*

$$G = \mathcal{K}\mathcal{A}_p\mathcal{N}, \tag{19}$$

и каждый элемент $g \in G$ однозначно разлагается в произведение элементов из $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{N}$. Группы $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{N}$ односвязны.

(Доказательство см. в [390], гл. VI, § 5.)

Пример 3. Пусть $L = \mathrm{sl}\,(n, R)$. Разложение Ивасавы (18) для $\mathrm{sl}\,(n, R)$ представляет собой разложение произвольной матрицы с нулевым следом в сумму кососимметрической, диагональной и верхней треугольной, причем последняя с нулями на главной диагонали (см. пример 1.6.3). Итак, группа $\mathcal{K}$ — ортогональная группа $\mathrm{SO}\,(n)$, группа $\mathcal{A}_p$ абелева, а группа $\mathcal{N}$ нильпотентна и состоит из верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Следовательно, глобальное разложение Ивасавы (19) для группы $\mathrm{SL}\,(n, R)$ представляет собой разложение произвольной унимодулярной матрицы в произведение ортогональной, диагональной и верхней треугольной матриц, причем последняя с единицами на главной диагонали.

Г. *Разложение Брюа*

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{K}\mathcal{A}\mathcal{N}$ — разложение Ивасавы связной полупростой группы Ли $\mathcal{G}$ с конечным центром. Пусть $\mathcal{M}$ — централизатор алгебры Ли A группы $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}$, т. е. $\mathcal{M} = \{k \in \mathcal{K} : \mathrm{Ad}_k X = X$ для каждого X из $A\}$. Полагаем $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{N}$.

Так как $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ нормализуют $\mathcal{N}$, то $\mathcal{P}$ — замкнутая подгруппа в $\mathcal{G}$.

Подгруппа $\mathcal{P}$ и подгруппы, полученные из нее сопряжениями в $\mathcal{G}$, будут называться *минимальными параболическими подгруппами* в $\mathcal{G}$.

Пусть L и A — алгебры Ли для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{A}$ соответственно, и пусть W — группа Вейля пары (L, A). Пусть $\mathcal{M}^*$ — нормализатор алгебры A в $\mathcal{K}$, т. е. $\mathcal{M}^* = \{k \in \mathcal{K}: \mathrm{Ad}_k A \subset A\}$. Очевидно, что $\mathcal{M}$ — нормальная подгруппа в $\mathcal{M}^*$. Группа Вейля W может быть отождествлена с фактор-группой $\mathcal{M}^*/\mathcal{M}$.

Пусть m_w^* — любой элемент из $\mathcal{M}^*$, лежащий в классе смежных элементов, сопоставляемом с w. Обозначим через $\mathcal{P}w\mathcal{P}$ двойной класс смежных элементов $\mathcal{P}m_w^*\mathcal{P}$. Следующая лемма дает так называемое *разложение Брюа* группы $\mathcal{G}$.

Лемма 5. *Отображение*

$$w \to \mathcal{P}w\mathcal{P}, \quad w \in W,$$

является взаимно однозначным отображением W на множество двойных классов смежных элементов $\mathcal{P}x\mathcal{P}$, $x \in \mathcal{G}$, т. е.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{P}w\mathcal{P} \quad (\textit{непересекающиеся слагаемые}).$$

(Доказательство см. в [150].)

Пример 4. Пусть $\mathcal{G} = \mathrm{SL}(2, R)$. Тогда

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)\right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \quad a \in R^+\right\},$$

$$\mathcal{N} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \in R\right\}.$$

Легко проверить, что централизатор $\mathcal{M}$ алгебры A в $\mathcal{K}$ состоит из двух элементов $\mathcal{M} = \{e, -e\}$, $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Минимальные параболические подгруппы $\mathcal{P}_x$ имеют вид

$$\mathcal{P}_x = \left\{\pm x \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} x^{-1}, \quad x \in \mathrm{SL}(2, R), \quad a \in R^+, \quad b \in R\right\}.$$

Используя определение подгруппы $\mathcal{M}^*$, легко проверить, что из условия $\mathrm{Ad}_k A \subset A$ следует, что $\varphi = n\pi/2$. Это предполагает, что $\mathcal{M}^*$ является группой из трех элементов:

$$\mathcal{M}^* = \left\{e, -e, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Следовательно,

$$W = \mathcal{M}^*/\mathcal{M} = \left\{e, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Поэтому $\mathrm{SL}(2, R)$ может быть представлена как непересекающееся объединение двух двойных классов смежных элементов.

§ 7. Классификация простых групп Ли

В силу теоремы 3.3 классификация Киллинга—Картана простых алгебр Ли приводит к классификации соответствующих простых групп Ли. Явная форма простой группы Ли, соответствующей простой комплексной или вещественной алгебре Ли L, может быть легко получена путем взятия экспоненты от явно определенного представления алгебры Ли L, заданного в гл. 1.5. Например, алгебра Ли $\mathrm{sl}(n, C)$ была реализована в виде множества всех комплексных $n \times n$-матриц с нулевым следом. Поэтому группа $\mathrm{SL}(n, C)$ состоит из всех элементов

$$x = e^X, \quad X \in \mathrm{sl}(n, C). \tag{1}$$