является взаимно однозначным отображением W на множество двойных классов смежных элементов $\mathcal{P}x\mathcal{P}$, $x \in \mathcal{G}$, т. е.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{P}w\mathcal{P} \quad (\textit{непересекающиеся слагаемые}).$$

(Доказательство см. в [150].)

Пример 4. Пусть $\mathcal{G} = \mathrm{SL}(2, R)$. Тогда

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)\right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \quad a \in R^+\right\},$$

$$\mathcal{N} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \in R\right\}.$$

Легко проверить, что централизатор $\mathcal{M}$ алгебры A в $\mathcal{K}$ состоит из двух элементов $\mathcal{M} = \{e, -e\}$, $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Минимальные параболические подгруппы $\mathcal{P}_x$ имеют вид

$$\mathcal{P}_x = \left\{\pm x \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} x^{-1}, \quad x \in \mathrm{SL}(2, R), \quad a \in R^+, \quad b \in R\right\}.$$

Используя определение подгруппы $\mathcal{M}^*$, легко проверить, что из условия $\mathrm{Ad}_k A \subset A$ следует, что $\varphi = n\pi/2$. Это предполагает, что $\mathcal{M}^*$ является группой из трех элементов:

$$\mathcal{M}^* = \left\{e, -e, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Следовательно,

$$W = \mathcal{M}^*/\mathcal{M} = \left\{e, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Поэтому $\mathrm{SL}(2, R)$ может быть представлена как непересекающееся объединение двух двойных классов смежных элементов.

§ 7. Классификация простых групп Ли

В силу теоремы 3.3 классификация Киллинга—Картана простых алгебр Ли приводит к классификации соответствующих простых групп Ли. Явная форма простой группы Ли, соответствующей простой комплексной или вещественной алгебре Ли L, может быть легко получена путем взятия экспоненты от явно определенного представления алгебры Ли L, заданного в гл. 1.5. Например, алгебра Ли $\mathrm{sl}(n, C)$ была реализована в виде множества всех комплексных $n \times n$-матриц с нулевым следом. Поэтому группа $\mathrm{SL}(n, C)$ состоит из всех элементов

$$x = e^X, \quad X \in \mathrm{sl}(n, C). \tag{1}$$

В силу тождества $\det e^X = e^{\operatorname{Tr} X}$ она является множеством всех унимодулярных $n \times n$-матриц. Аналогично вычисляется явная реализация всех других простых групп Ли, соответствующая явной реализации в гл. 1.5 сопоставляемых им алгебр. Ниже мы их перечисляем.

А. *Группы, соответствующие алгебрам* A_{n-1}:

$$\mathrm{SL}(n, C) \begin{cases} \mathrm{SU}(n) \\ \mathrm{SL}(n, R) \\ \mathrm{SU}(p, q), \quad p+q=n,\ p \geqslant q. \\ \mathrm{SU}^*(2n) \\ \mathrm{SL}(n, C)^R \end{cases} \tag{2}$$

1. SU (p, q), $p+q=n$, $p \geqslant q$ — группа всех матриц из SL (n, C), которые оставляют инвариантной квадратичную форму

$$z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_p\bar{z}_p - z_{p+1}\bar{z}_{p+1} - \cdots - z_n\bar{z}_n \tag{3}$$

в C^n. При $q=0$ получаем унитарную группу SU (n) унимодулярных матриц. Остальные группы SU (p, q), $q \neq 0$, могут быть названы *псевдоунитарными* группами.

2. SL (n, R) — группа всех вещественных матриц с единичным детерминантом.

3. SU* $(2n)$ — группа всех матриц из SL $(2n, C)$, которые коммутируют с преобразованием σ в C^{2n}, заданным формулой

$$\sigma: (z_1, \ldots, z_{2n}) \to (\bar{z}_{n+1}, \ldots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1 \ldots, -\bar{z}_n). \tag{4}$$

4. SL $(n, C)^R$ — группа SL (n, C), рассматриваемая как вещественная группа Ли.

Б. *Группы, соответствующие алгебрам* B_n:

$$\mathrm{SO}(2n+1, C) \begin{cases} \mathrm{SO}(2n+1) \\ \mathrm{SO}(p, q), \quad p+q=2n+1,\ p \geqslant q. \\ \mathrm{SO}(2n+1, C)^R \end{cases} \tag{5}$$

1. SO $(2n+1, C)$ — группа всех матриц из SL $(2n+1, C)$, которые сохраняют в C^{2n+1} квадратичную форму

$$z_1^2 + \cdots + z_{2n+1}^2. \tag{6}$$

2. SO (p, q), $p+q=2n+1$, $p \geqslant q$ — группа всех матриц из SL $(2n+1, R)$, сохраняющих квадратичную форму

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{2n+1}^2. \tag{7}$$

При $q=0$ получаем компактную ортогональную группу SO $(2n+1)$. Остальные группы SO (p, q), $q > 0$, могут быть названы псевдоортогональными.

3. $SO(2n+1, C)^R$ — группа $SO(2n+1, C)$, рассматриваемая как вещественная группа Ли.

В. *Группы, соответствующие алгебрам C_n:*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Sp}(n) \\ \mathrm{Sp}(n, C) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Sp}(n, R) \\ & \mathrm{Sp}(p, q), \quad p+q=n,\ p \geqslant q. \\ & \mathrm{Sp}(n, C)^R \arrow[u, dashed] \end{tikzcd} \tag{8}$$

1. $\mathrm{Sp}(n, C)$ — группа всех матриц из $\mathrm{GL}(2n, C)$, которые сохраняют в C^{2n} внешнюю форму [1])

$$z_1 \wedge z_{n+1} + z_2 \wedge z_{n+2} + \cdots + z_n \wedge z_{2n}. \tag{9}$$

2. $\mathrm{Sp}(p, q)$ — группа всех матриц из $\mathrm{Sp}(n, C)$, которые сохраняют в C^{2n} эрмитову форму

$$z^T \eta_{pq} \bar{z}, \tag{10}$$

где

$$\eta_{pq} = \begin{vmatrix} -I_p & & & 0 \\ & I_q & & \\ & & -I_p & \\ 0 & & & I_q \end{vmatrix}. \tag{11}$$

При $q=0$ получаем компактную симплектическую группу $\mathrm{Sp}(n)$. Из (10) видно, что

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n, C) \cap U(2n)$$

и

$$\mathrm{Sp}(p, q) = \mathrm{Sp}(n, C) \cap U(2p, 2q).$$

3. $\mathrm{Sp}(n, R)$ — группа всех матриц из $\mathrm{GL}(2n, R)$, которые сохраняют в R^{2n} внешнюю форму

$$x_1 \wedge x_{n+1} + \cdots + x_n \wedge x_{2n}. \tag{12}$$

4. $\mathrm{Sp}(n, C)^R$ — группа $\mathrm{Sp}(n, C)$, рассматриваемая как вещественная группа Ли.

---

[1]) Внешняя форма определяется формулой $(x \wedge y)^{ij} = \frac{1}{2}(x^i y^j - x^j y^i)$.

Г. *Группы, соответствующие алгебрам* D_n:

$$\mathrm{SO}(2n, C) \begin{cases} \mathrm{SO}(2n) \\ \mathrm{SO}^*(2n) \\ \mathrm{SO}(p, q), \quad p+q=2n,\ p \geqslant q. \\ \mathrm{SO}(2n, C)^R \end{cases} \tag{13}$$

1. Определения групп $\mathrm{SO}(2n, C)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $p+q=2n$, $p \geqslant q$, $\mathrm{SO}(2n, C)^R$ следуют из определений Б. 1, Б. 2 и Б.3 путем замены в соответствующих формулах индекса $2n+1$ на $2n$.

2. Группа $\mathrm{SO}^*(2n)$ является группой всех матриц из $\mathrm{SO}(2n, C)$, которые сохраняют в C^{2n} косоэрмитову форму

$$-z_1\bar{z}_{n+1}+z_{n+1}\bar{z}_1-z_2\bar{z}_{n+2}+z_{n+2}\bar{z}_2-\cdots-z_n\bar{z}_{2n}+z_{2n}\bar{z}_n. \tag{14}$$

Д. *Связность классических групп Ли*

Мы показываем в гл. 5, что если группа Ли G n-связна, то существуют n-значные представления группы G. Следующая теорема дает описание свойства связности классических групп Ли.

Теорема 1. а) *Группы* $\mathrm{GL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, R)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SU}^*(2n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n, C)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$, $\mathrm{Sp}(n, C)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(n, R)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ *связны.*

б) *Группы* $\mathrm{SL}(n, C)$ *и* $\mathrm{SU}(n)$ *односвязны.*

в) *Группы* $\mathrm{GL}(n, R)$ *и* $\mathrm{SO}(p, q)$ $(0 < p < p+q)$ *имеют по две связные компоненты.*

(Доказательство см. в [390], гл. IX, § 4.)

В табл. 1 дается описание центра $Z(G)$ универсальной накрывающей группы G компактных простых групп Ли.

Таблица 1

G	$Z(G)$	$\dim G$
$\mathrm{SU}(n)$	Z_n	n^2-1
$\mathrm{SO}(2n+1)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{Sp}(n)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{SO}(2n)$	Z_4, если n нечетное $Z_2 \times Z_2$, если n четное	$n(2n-1)$

§ 8. Структура компактных групп Ли

Мы доказываем здесь замечательный результат, состоящий в в том, что любая компактная группа Ли является прямым произведением ее центра и конечного числа компактных простых подгрупп.