Г. *Группы, соответствующие алгебрам* D_n:

$$\mathrm{SO}(2n, C) \begin{cases} \mathrm{SO}(2n) \\ \mathrm{SO}^*(2n) \\ \mathrm{SO}(p, q), \quad p+q=2n,\ p \geqslant q. \\ \mathrm{SO}(2n, C)^R \end{cases} \tag{13}$$

1. Определения групп $\mathrm{SO}(2n, C)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $p+q=2n$, $p \geqslant q$, $\mathrm{SO}(2n, C)^R$ следуют из определений Б. 1, Б. 2 и Б.3 путем замены в соответствующих формулах индекса $2n+1$ на $2n$.

2. Группа $\mathrm{SO}^*(2n)$ является группой всех матриц из $\mathrm{SO}(2n, C)$, которые сохраняют в C^{2n} косоэрмитову форму

$$-z_1\bar{z}_{n+1}+z_{n+1}\bar{z}_1-z_2\bar{z}_{n+2}+z_{n+2}\bar{z}_2-\cdots-z_n\bar{z}_{2n}+z_{2n}\bar{z}_n. \tag{14}$$

Д. *Связность классических групп Ли*

Мы показываем в гл. 5, что если группа Ли G n-связна, то существуют n-значные представления группы G. Следующая теорема дает описание свойства связности классических групп Ли.

Теорема 1. а) *Группы* $\mathrm{GL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, R)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SU}^*(2n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n, C)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$, $\mathrm{Sp}(n, C)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(n, R)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ *связны.*

б) *Группы* $\mathrm{SL}(n, C)$ *и* $\mathrm{SU}(n)$ *односвязны.*

в) *Группы* $\mathrm{GL}(n, R)$ *и* $\mathrm{SO}(p, q)$ $(0 < p < p+q)$ *имеют по две связные компоненты.*

(Доказательство см. в [390], гл. IX, § 4.)

В табл. 1 дается описание центра $Z(G)$ универсальной накрывающей группы G компактных простых групп Ли.

Таблица 1

G	$Z(G)$	$\dim G$
$\mathrm{SU}(n)$	Z_n	n^2-1
$\mathrm{SO}(2n+1)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{Sp}(n)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{SO}(2n)$	Z_4, если n нечетное $Z_2 \times Z_2$, если n четное	$n(2n-1)$

§ 8. Структура компактных групп Ли

Мы доказываем здесь замечательный результат, состоящий в в том, что любая компактная группа Ли является прямым произведением ее центра и конечного числа компактных простых подгрупп.

В гл. 1, § 2, Г мы определили компактную алгебру Ли L как алгебру, в которой существует положительно определенная квадратичная форма $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая условию

$$([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0. \tag{1}$$

Теперь мы докажем

Утверждение 1. *Алгебра Ли L компактной группы Ли G компактна.*

Доказательство. Пусть (X, X) — любая положительно определенная квадратичная форма на L (например, $(X, X) = \sum x_i^2$, где x_i — координаты элемента X в некотором базисе).

Положим $\varphi_g(X) = (l_gX, l_gX)$, где l_gX обозначает действие присоединенной группы в L, заданное формулой (3.29). При фиксированном $g \in G$ $\varphi_g(X)$, как функция вектора $X \in L$, является положительно определенной квадратичной формой, в то время как при фиксированном X $\varphi_g(X)$ — непрерывная положительная функция на G. Поскольку G компактна, новая билинейная форма, определенная формулой

$$(X, X)' = \int_G \varphi_g(X)\,\mathrm{d}g,$$

является положительно определенной квадратичной формой на L. В силу инвариантности меры Хаара при любом $h \in G$ имеем

$$(l_hX, l_hX)' = \int_G (l_{hg}X, l_{hg}X)\,\mathrm{d}g = \int_G (l_gX, l_gX)\,\mathrm{d}g = (X, X)', \tag{2}$$

т. е. $(\cdot, \cdot)'$ инвариантно относительно действия присоединенной группы. Взяв в (2) однопараметрические подгруппы $h(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \dim G$, присоединенной группы и дифференцируя по t_i при $t_i = 0$ получим формулу (1).

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. *Компактная связная группа Ли G является прямым произведением ее связного центра G_0 и простых компактных связных подгрупп Ли.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли группы G. В силу утверждения 1 L компактна. Поэтому из теоремы 1.3.2 заключаем, что

$$L = N \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n, \tag{3}$$

где N — центр в L, а S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — простые идеалы в L. Следовательно, в силу теоремы 3.3 получаем

$$G = G_0 \times G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n, \tag{4}$$

где G_0 — связный центр группы G, а G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — простые связные подгруппы Ли в G.