Глава 4

Однородные и симметрические пространства

§ 1. Однородные пространства

Пусть Γ — топологическое пространство, а G — топологическая группа. Мы говорим, что G — *топологическая* (левая) *группа преобразований* на Γ, если выполнены следующие условия:

1° С каждым $g \in G$ сопоставляется гомеоморфизм $\gamma \to g\gamma$ из Γ на Γ.

2° Единичный элемент e группы G является тождественным гомеоморфизмом на Γ.

3° Отображение $(g, \gamma) \to g\gamma$ из $G \times \Gamma$ в Γ непрерывно.

4° $(g_1 g_2)\gamma = g_1(g_2\gamma)$ для $g_1, g_2 \in G$ и $\gamma \in \Gamma$.

Топологическое пространство Γ, на котором действует G, называется *G-пространством*.

Мы говорим, что G действует *транзитивно* на Γ, если для каждой пары точек $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ существует элемент $g \in G$, такой, что $\gamma_2 = g\gamma_1$. Если e — единственный элемент в G, который оставляет каждую точку $\gamma \in \Gamma$ неизменной, то говорят, что G действует *эффективно* на Γ, и G называется *эффективной*.

Из определения 2.2.4 следует, что хаусдорфово пространство Γ однородно, если G действует на Γ транзитивно.

Подгруппа в G, которая оставляет точку $\gamma \in \Gamma$ неизменной, называется *стационарной* (изотропной, малой) *группой* точки γ. Если H_γ — стационарная группа точки γ и $\gamma' = g\gamma$, то стационарной группой точки γ' является группа $H_{\gamma'} = gH_\gamma g^{-1}$. Поэтому стационарные группы любых двух точек однородного пространства Γ изоморфны.

Важной реализацией однородного пространства служит фактор-пространство G/H. Действительно, пусть G — топологическая группа, H — замкнутая подгруппа в G, а G/H — семейство левых классов смежных элементов xH, $x \in G$. Определяем топологию на пространстве G/H посредством канонического проектирования π: $G \ni x \to xH \in G/H$; именно, мы говорим, что множество $X \subset G/H$ открыто в G/H, если $\pi^{-1}(X)$ открыто в G. Легко проверить, что такой набор открытых множеств определяет хаусдорфову топологию на G/H. Если каждому $g \in G$ мы предписываем отображение g: $xH \to gxH$, то G становится транзитивной топологической группой преобразований, действующей на G/H, и, следовательно, G/H — однородное пространство. Эти утвержде-

ния проверяются, используя непрерывность группового умножения в G.

Группа G действует эффективно на G/H тогда и только тогда, когда H не содержит нормальной подгруппы N группы G. В самом деле, если $N \subset H$ — нормальная подгруппа в G, $n \in N$ и $x \in G$, то $x^{-1}nx = n' \in N$ и $nxH = xn'H = xH$, т. е. каждому $n \neq e$ соответствует тождественное преобразование. Чтобы доказать вторую часть утверждения, заметим, что по условию 2° множество N элементов $n \in G$, которые удовлетворяют условию $nxH = xH$ для каждого $x \in G$, порождает подгруппу в G. Для каждых $x, g \in G$, $n \in N$ и $h \in H$ имеем $(gng^{-1})\, xH = xH$ и $(hnh^{-1})\, H = H$. Поэтому N — нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H.

Это построение показывает, что каждое фактор-пространство G/H топологической группы G по замкнутой подгруппе H является однородным пространством. В частности, если $H = \{e\}$, то G само однородное пространство.

Аналогично однородное пространство $\{Hg\}$ *правых* классов смежных элементов обозначаем символом $H\backslash G$.

Возникает интересный вопрос: может ли каждое однородное G-пространство быть представлено в такой форме? Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Пусть G — локально компактная топологическая группа со счетным базисом, действующая транзитивно на локально компактном хаусдорфовом пространстве Γ. Пусть γ — любая точка в Γ, а H — подгруппа в G, которая оставляет γ неизменным. Тогда*

1° *H замкнута,*

2° *отображение*

$$gH \to g\gamma$$

является гомеоморфизмом из G/H на Γ.

(Доказательство см. в [390], гл. II, теорема 3.2.)

Теорема также справедлива для однородных пространств правых классов смежных элементов $H\backslash G$.

Однородные пространства играют важную роль в теории представлений. Мы используем их для построения индуцированных представлений различных групп (гл. 16).

§ 2. Симметрические пространства

В этом параграфе мы рассматриваем специальный класс однородных пространств, фундаментальная группа G которых является группой Ли.

Пусть G — связная группа Ли, и пусть σ — инволютивный автоморфизм в G (т. е. $\sigma^2 = 1$, $\sigma \neq 1$). Пусть G_σ — замкнутая