

ния проверяются, используя непрерывность группового умножения в G .

Группа G действует эффективно на G/H тогда и только тогда, когда H не содержит нормальной подгруппы N группы G . В самом деле, если $N \subset H$ — нормальная подгруппа в G , $n \in N$ и $x \in G$, то $x^{-1}nx = n' \in N$ и $nxH = xn'H = xH$, т. е. каждому $n \neq e$ соответствует тождественное преобразование. Чтобы доказать вторую часть утверждения, заметим, что по условию 2° множество N элементов $n \in G$, которые удовлетворяют условию $nxH = xH$ для каждого $x \in G$, порождает подгруппу в G . Для каждого x , $g \in G$, $n \in N$ и $h \in H$ имеем $(gng^{-1})xH = xH$ и $(hn^{-1})H = H$. Поэтому N — нормальная подгруппа в G , содержащаяся в H .

Это построение показывает, что каждое фактор-пространство G/H топологической группы G по замкнутой подгруппе H является однородным пространством. В частности, если $H = \{e\}$, то G само однородное пространство.

Аналогично однородное пространство $\{Hg\}$ правых классов смежных элементов обозначаем символом $H \setminus G$.

Возникает интересный вопрос: может ли каждое однородное G -пространство быть представлено в такой форме? Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — локально компактная топологическая группа со счетным базисом, действующая транзитивно на локально компактном хаусдорфовом пространстве Γ . Пусть γ — любая точка в Γ , а H — подгруппа в G , которая оставляет γ неизменным. Тогда

- 1° H замкнута,
- 2° отображение

$$gH \rightarrow g\gamma$$

является гомеоморфизмом из G/H на Γ .

(Доказательство см. в [390], гл. II, теорема 3.2.)

Теорема также справедлива для однородных пространств правых классов смежных элементов $H \setminus G$.

Однородные пространства играют важную роль в теории представлений. Мы используем их для построения индуцированных представлений различных групп (гл. 16).

§ 2. Симметрические пространства

В этом параграфе мы рассматриваем специальный класс однородных пространств, фундаментальная группа G которых является группой Ли.

Пусть G — связная группа Ли, и пусть σ — инволютивный автоморфизм в G (т. е. $\sigma^2 = 1$, $\sigma \neq 1$). Пусть G_σ — замкнутая

подгруппа в G , состоящая из всех точек из G , инвариантных при σ , а G_σ^I — компонента единицы в G_σ . Пусть H — замкнутая подгруппа, такая, что $G_\sigma \supset H \supset G_\sigma^I$. Тогда мы говорим, что G/H — симметрическое однородное пространство (определенное по σ). Если мы обозначим через σ инволютивный автоморфизм алгебры Ли L группы G , индуцированный автоморфизмом σ , то в силу рассуждений, приведенных в гл. 1, § 6 [формулы (9)–(13)], получаем

$$L = K \dot{+} P, \quad (1)$$

где

$$K = \{X \in L : \sigma(X) = X\} \quad (2)$$

и совпадает с подалгеброй, соответствующей подгруппе H , а

$$P = \{X \in L : \sigma(X) = -X\}. \quad (3)$$

Очевидно, что мы имеем (см. теорему 1.6.2)

$$[K, K] \subset K, \quad [K, P] \subset P, \quad [P, P] \subset K. \quad (4)$$

Двухточечную функцию $f(x, y)$, которая удовлетворяет условию

$$f(gx, gy) = f(x, y), \quad x, y \in \Gamma, \quad g \in G, \quad (5)$$

мы называем инвариантом симметрического пространства.

Ранг симметрического пространства G/H определяется как размерность максимальной абелевой подалгебры в P при разложении (1). Это понятие имеет большое значение в теории представлений, поскольку оно дает число алгебраически независимых инвариантных дифференциальных операторов в пространстве $L^2(G/H)$ (см. теорему 15.1.1).

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathrm{SO}(n + 1)$, и σ определено формулой

$$\sigma(g) = SgS^{-1}, \quad g \in G, \quad (6)$$

где

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

а I_n — единичная матрица в R^n . Находим, что $G_\sigma = \mathrm{SO}(n)$ и совпадает с ее компонентой единицы. Поэтому $H = \mathrm{SO}(n)$. Симметрическое пространство $\Gamma = \mathrm{SO}(n + 1)/\mathrm{SO}(n)$ гомеоморфно n -мерной сфере S^n . Действительно, группа $G = \mathrm{SO}(n + 1)$ действует транзитивно на многообразии S^n , заданном уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1. \quad (8)$$

Транзитивность сферы S^n по отношению к группе $\mathrm{SO}(n + 1)$ следует из того факта, что любой вещественный вектор $x =$

$= (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$, удовлетворяющий уравнению (8), может быть получен из вектора $e^1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ с помощью матрицы вращения $g(x)$ с первым столбцом $g_1^i(x) = x^i$. Следовательно, любые два вектора $x', x'' \in S^n$ могут быть связаны один с другим матрицей вращения $g = g(x') g^{-1}(x'')$. Подгруппа в $\text{SO}(n+1)$, которая оставляет точку $x = e^1 \in S^n$ инвариантной, изоморфна $H_\sigma = \text{SO}(n)$. Поэтому, согласно теореме 1.1, отображение

$$gH \rightarrow ge^1 \quad (9)$$

является гомеоморфизмом из $\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ на S^n .

Разложение Картана алгебры Ли группы $\text{SO}(n+1)$ задается формулой

$$\text{so}(n+1) = \text{so}(n) \dot{+} P.$$

Поскольку P натягивается на элементы $M_{1,n+1}, \dots, M_{n,n+1}$, из коммутационных соотношений видно, что максимальная абелева подалгебра в P одномерна. Поэтому ранг пространства S^n равен единице.

ТЕОРЕМА 1. *Каждое однородное пространство G/H , где G — группа Ли, а H — компактная подгруппа, допускает инвариантную метрику.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть o — точка в G/H , представляемая классом смежных элементов H , а \tilde{H} — группа линейных преобразований касательного пространства $T_o(G/H)$, индуцированных элементами из H . Поскольку H компактна, то \tilde{H} также компактна, и рассуждения, аналогичные рассуждениям в § 3.8 [формула (3.8.2)], показывают, что существует положительно определенное внутреннее произведение в $T_o(G/H)$ (назовем его g_0), которое инвариантно при \tilde{H} . Для каждого $\gamma \in G/H$ мы берем элемент $x \in G$, такой, что $x(o) = \gamma$, и определяем внутреннее произведение g_γ в $T_\gamma(G/H)$ формулой $g_\gamma(X, Y) = g_0(x^{-1}X, x^{-1}Y)$, $X, Y \in T_\gamma(G/H)$. Множество \tilde{X} точек $x \in G$, которые переводят o в γ , порождает левый класс смежных элементов в G относительно H . Метрика g_γ не зависит от выбора элемента $x \in \tilde{X}$. Действительно, если $x, y \in \tilde{X}$ (т. е. $x^{-1}y = h \in H$), то

$$g_0(y^{-1}X, y^{-1}Y) = g_0(h^{-1}x^{-1}X, h^{-1}x^{-1}Y) = g_0(x^{-1}X, x^{-1}Y).$$

Так же легко проверяется то, что так полученная риманова метрика инвариантна относительно G .

Пусть G — связная группа Ли, а G/H — симметрическое однородное пространство с компактным H . Пространство G/H ,

снабженное G -инвариантной римановой метрикой, заданной в теореме 1, называется *глобально симметрическим римановым пространством*. Согласно формулам (1)–(4), мы можем сопоставлять с каждым глобально симметрическим римановым пространством G/H пару (L, σ) со следующими свойствами:

- 1) L — алгебра Ли для G ;
- 2) σ — инволютивный автоморфизм в L ;
- 3) множество $K = \{X \in L : \sigma(X) = X\}$ является компактной подалгеброй в L , и K, P удовлетворяют коммутационным соотношениям (4).

Пара (L, σ) называется *ортогональной симметрической алгеброй Ли*.

Сопоставление ортогональной симметрической алгебры с глобально симметрическим римановым пространством Γ позволяет свести задачу классификации этих пространств к задаче классификации ортогональных симметрических алгебр.

Глобально симметрическое риманово пространство называют *неприводимым*, если соответствующая ортогональная симметрическая алгебра Ли удовлетворяет следующим условиям:

- 1) L — полупроста, а K не содержит отличных от 0 идеалов из L ;
- 2) K — максимальная собственная подалгебра в L .

ПРИМЕР 2. Пусть H_n — множество всех положительно определенных эрмитовых матриц порядка n с единичным детерминантом. Рассмотрим движения в H_n , заданные формулой

$$h \rightarrow h_g = ghg^* \in H_n, \quad (10)$$

где $g \in \mathrm{SL}(n, C)$. Проверяется, что $\mathrm{SL}(n, C)$ действует транзитивно на H_n . Стационарная подгруппа H точки $I_n \in H_n$ совпадает, согласно (10), с множеством всех матриц, удовлетворяющих условию $I_n = gg^*$, т. е. с подгруппой $\mathrm{SU}(n)$. Инволютивный автоморфизм σ в $\mathrm{SL}(n, C)$, который оставляет каждую точку из $\mathrm{SU}(n)$ неподвижной, задается формулой $\sigma(g) = g^{*-1}$. Поэтому G/H — глобально симметрическое риманово пространство, которое, согласно теореме 1.1, гомеоморфно H_n . Так же проверяется, что ортогональная симметрическая алгебра $(\mathrm{sl}(n, C), \sigma)$ неприводима. Следовательно, глобально симметрическое риманово пространство $\mathrm{SL}(n, C)/\mathrm{SU}(n)$ неприводимо.

Картан показал, что задача классификации глобально симметрических римановых пространств может быть сведена к задаче классификации неприводимых пространств, и решил последнюю задачу [161—165]. В табл. 1 мы перечисляем компактные и не-

компактные *неприводимые* глобально симметрические римановы пространства (типы I и III в классификации Картана), группы преобразований которых являются простыми вещественными связанными классическими группами Ли.

Таблица 1

**Неприводимые глобально симметрические римановы пространства,
группы преобразований которых являются простыми
вещественными связанными группами Ли**

Компактные	Некомпактные	Ранг	Размерность
$SU(n)/SO(n)$	$SL(n, R)/SO(n)$	$n-1$	$(n-1)(n+2)/2$
$SU(2n)/Sp(n)$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$n-1$	$(n-1)(2n+1)$
$SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$	$SU(p, q)/S(U(p) \times U(q))$	$\min(p, q)$	$2pq$
$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$	$SO_0(p, q)/SO(p) \times SO(q)$	$\min(p, q)$	pq
$SO(2n)/U(n)$	$SO^*(2n)/U(n)$	$[n/2]$	$n(n-1)$
$Sp(n)/U(n)$	$Sp(n, R)/U(n)$	n	$n(n+1)$
$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$\min(p, q)$	$4pq$

Все пространства в табл. 1 односвязны. Мы не включили в табл. 1 симметрические пространства, сопоставляемые с исключительными группами, поскольку ниже мы их не используем.

В дополнение к перечисленным неприводимым симметрическим пространствам существуют еще два других класса. Первый класс состоит из неприводимых глобально симметрических римановых пространств, которые являются простыми компактными связанными группами Ли (тип II). Последний класс (тип IV) содержит неприводимые глобально симметрические римановы пространства, которые являются пространствами G/H классов смежных элементов, где G — связная группа Ли, алгебра Ли которой совпадает с вещественной формой $(L)^R$ простой комплексной алгебры Ли L , а H — максимальная компактная подгруппа в G .

Следует также заметить, что изоморфизмы комплексных и вещественных простых алгебр Ли низших размерностей (см. гл. 1, § 5, табл. 1) предполагают ряд совпадений симметрических пространств низших размерностей; например,

$$SU(2, 2)/S(U(2) \times U(2)) \sim SO_0(4, 2)/SO(4) \times SO(2)$$

(соответствует изоморфизму $su(2, 2) \sim so(4, 2)$). Полный список совпадений см. в [390], гл. IX.

В табл. 2 мы перечисляем симметрические пространства с некомпактными стационарными подгруппами.

Таблица 2

**Симметрические пространства G/H
с некомпактной стационарной группой**

G H	SL (n, C)	SL (n, R)	SU (p, q)
	SO (n, C)	SL (p, R) \times SL (q, R) \times R^1	SU ($k, k+h$) \times SU ($p-k, n-k-h$) \times U (1)
	SL (n, R)	SO (p, q)	SO (p, q)
	SL (p, C) \times SL (q, C) \times C^1	Sp ($n/2, R$)	Sp ($p/2, q/2$)
	SU (p, q)	Sp ($n/2, C$) \times R^1	SO* (n)
	Sp ($n/2, C$)		Sp (n, R) $\left. \begin{array}{l} \\ \text{SL}(n, C) \times R^1 \end{array} \right\} p=q=n/2$
	SU* (n)		

G H	SU* (n)	SO (n, C)	SO (p, q)
	SU* (p) \times SU* (q) \times R^1	SO (p, C) \times SO (q, C)	SO ($p, k+h$) \times SO ($p-k, n-k-h$)
	Sp ($p/2, q/2$)	p=1 или p > 2, q > 2	k+h > 2, n-k-h > 2
	SO* (n)		
	SL (n, C) \times U (1)	SO ($n-2$) \times C^1	SO ($p-2, q$) \times U (1)
		SO (p, q)	SO ($p-1, q-1$) \times R^1
		SL ($n/2, C$) \times C^1	SU ($p/2, q/2$) \times U (1)
		SO* (n)	SL ($n/2, R$) \times R^1 $\left. \begin{array}{l} \\ p=q=n/2 \end{array} \right\}$
		SO* ($n/2, C$)	SO ($n/2, C$) $\left. \begin{array}{l} \\ p=2 \end{array} \right\}$
		SU (p, q) \times U (1)	SO ($n-2$) \times U (1) $\left. \begin{array}{l} \\ q=n-2 \end{array} \right\}$

G H	Sp (n, C)	Sp (n, R)	Sp (p, q)
	SL (n, C) \times C^1	Sp (p, R) \times Sp (q, R)	Sp ($k, k+h$) \times Sp ($p-k, n-k-h$)
	Sp (n, R)	SU (p, q) \times U (1)	SU (p, q) \times U (1)
	Sp (p, C) \times Sp (q, C)	SL (n, R) \times R^1	
	Sp (p, q)	Sp ($n/2, C$)	
		SU* (n) \times R^1 $\left. \begin{array}{l} \\ p=q=n/2 \end{array} \right\}$	
		Sp ($n/2, C$) $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	

Замечание. $p+q=n$. $R^1(C^1)$ — аддитивная группа вещественных (комплексных) чисел. Там, где стоят $n/2$, $p/2$, ..., n и p четные.

Полная классификация симметрических пространств, включая симметрические пространства, сопоставляемые с исключительными простыми группами Ли, разработана Бергером [110].