§ 3. Инвариантные и квазиинвариантные меры на однородных пространствах

Пусть X — однородное пространство, группа преобразований которого является локально компактная сепарабельная группа G. Из теоремы 1.1 мы знаем, что X изоморфно пространству классов смежных элементов $H\backslash G$ или G/H, где H — стационарная подгруппа точки $x_0 \in X$.

Пусть S — подмножество в $X = H\backslash G$. Под «сдвигом» подмножества S элементом $g \in G$ мы понимаем множество $Sg = \{xg: x \in S\}$. Пусть $d\mu(x)$ — положительная мера на X; определяем меру $d\mu_g(x) = d\mu(xg)$ как меру, заданную следующей формулой:

$$\mu_g(f) \equiv \int_X f(x)\,d\mu(xg) = \int_X f(xg^{-1})\,d\mu(x) \quad \text{для всех } f \in C_0(X). \tag{1}$$

Другими словами, $\mu_g(S) \equiv \mu(Sg)$ для каждого борелевского множества S в пространстве X.

Мы видели, что на каждой локально компактной топологической группе существует инвариантная мера (см. теорему 2.3.1). Следующий пример показывает, что на однородном пространстве инвариантная мера может не существовать.

Пример 1. Пусть G — группа треугольных вещественных матриц вида

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha^{-1} \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

и пусть

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Каждый элемент $g \in G$ может быть представлен в виде (разложение Макки из теоремы 2.4.1)

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\alpha & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Поэтому каждый элемент из правого класса смежных элементов Hg может быть однозначно представлен точкой $x = \gamma\alpha$ вещественной прямой R. Следовательно, $X = H\backslash G = R$. Поскольку элемент $x \in X$ соответствует групповому элементу $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, то мы получаем действие группы G в X согласно формуле

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha x + \gamma & \alpha^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^2 x + \alpha\gamma & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

или

$$g\colon\ x \to \alpha^2 x + \alpha\gamma. \tag{5}$$

Инвариантная относительно G мера на X должна быть, в частности, инвариантной относительно преобразований $x \to x + \gamma$; поэтому она должна быть пропорциональна мере Лебега на R (см. упражнение 2.3.3). Однако такая мера не может быть инвариантной относительно гомотетических преобразований $x \to \alpha^2 x$. Следовательно, не существует инвариантной относительно G меры $d\mu(x)$ на X.

Отсутствие инвариантных мер на однородных пространствах приводит к понятию квазиинвариантных мер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительная мера $d\mu(x)$ на X называется *квазиинвариантной*, если мера $d\mu_g(x) \equiv d\mu(xg)$ и $d\mu(x)$ эквивалентны для каждого $g \in G$.

Замечание. Положительные меры $d\mu_1$ и $d\mu_2$ называются *эквивалентными*, если они имеют одни и те же множества меры нуль. Согласно теореме Радона—Никодима (приложение А.5), тогда существует функция $\rho(x) \geqslant 0$, такая, что

$$d\mu_1(x) = \rho(x)\, d\mu_2(x). \tag{6}$$

Функция $\rho(x) = d\mu_1(x)/d\mu_2(x)$ называется *производной Радона—Никодима.*

Следующая теорема описывает основные свойства квазиинвариантных мер на однородных пространствах.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — локально компактная сепарабельная группа, H — замкнутая подгруппа в G и $X = H \backslash G$. Тогда:*

1° *Существует квазиинвариантная мера на X, такая, что производная Радона—Никодима $d\mu_g(x)/d\mu(x)$ является непрерывной функцией на $G \times X$.*

2° *Любые две квазиинвариантные меры на X эквивалентны.*

3° *Все квазиинвариантные меры могут быть получены следующим образом: пусть $\rho(g)$ — строго положительная локально интегрируемая борелева функция, удовлетворяющая условию*

$$\rho(hg) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(g) \quad \text{для всех } h \in H, \tag{7}$$

где Δ_H и Δ_G — модулярные функции для H и G соответственно. Тогда ρ связано с квазиинвариантной мерой μ на X формулой

$$\int_G f(g)\rho(g)\, dg = \int_X d\mu(\mathring{g}) \int_H f(hg)\, dh, \quad \mathring{g} \equiv Hg, \quad f \in C_0(G). \tag{8}$$

Мера μ удовлетворяет условию

$$d\mu(\mathring{gg'}) = \frac{\rho(gg')}{\rho(g')}\, d\mu(\mathring{g}) \tag{9}$$

и для заданного ρ определяется однозначно с точностью до мультипликативной константы.

(Доказательство см. в [544] и [552].)

Следующее следствие дает удобный критерий существования инвариантной меры на пространстве $X = H\backslash G$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Инвариантная мера* μ *на однородном пространстве* $X = H\backslash G$ *существует тогда и только тогда, когда* $\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$ *для всех* $h \in H$. *С точностью до мультипликативной константы эта мера определяется однозначно и удовлетворяет условию*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_X d\mu(\mathring{g}) \int_H f(hg)\,dh, \quad \mathring{g} = Hg. \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно для каждого g из (8) взять $\rho(g) = 1$. В частности, если G и H унимодулярны, то $\Delta_G(h) = \Delta_H(h) = 1$ и $X = H\backslash G$ обладает инвариантной мерой.

ПРИМЕР 2. Пусть $G = SO(3, 1)$ и $H = SO(3)$. Однородное пространство $X = H\backslash G$ может быть представлено в виде гиперболоида

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \rho^2 > 0 \tag{11}$$

(см. упражнение 1.2). Поскольку G и H унимодулярны, то для всех $h \in H$ мы имеем $\Delta_G(h) = \Delta_H(h) = 1$. Следовательно, в силу следствия 1 X обладает инвариантной мерой.

Теперь вычислим явный вид инвариантной меры $d\mu$ на $X = H\backslash G$. Раньше свяжем поверхность (11) второго порядка с дифференциальной формой $d\mu$, определенной формулой

$$dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = d(x_\rho x^\rho)\,d\mu = \mathcal{J}\,d(x_\rho x^\rho)\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{12}$$

Якобиан $\mathcal{J}$ преобразования $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_\rho x^\rho, x_1, x_2, x_3)$ принимает вид $\mathcal{J} = x_0/2$, где $x_0 = (\rho^2 + x^2)^{1/2}$ [для верхнего гиперболоида (11)]. Поэтому в силу (12)

$$d\mu(x) = \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{2x_0}. \tag{13}$$

Правое преобразование $x \to xg$ сохраняет дифференциальные формы $dx_0dx_1dx_2dx_3$ и $d(x_\rho x^\rho)$. Поэтому дифференциальная форма (13) инвариантна и задает инвариантную меру на $x = H\backslash G$. В силу следствия 1 эта мера определяется однозначно с точностью до мультипликативной константы.

В релятивистской кинематике четыре-вектор энергии-импульса частицы с положительной массой удовлетворяет условию $p_0^2 - p^2 = m^2$; поэтому это точка на однородном пространстве $H\backslash G$, и, следовательно, инвариантная мера совпадает с $d^3p/2p_0$.

Теперь мы дадим так называемую теорему о разложении меры. Пусть X — локально компактное пространство, счетное на бесконечности, r — соотношение эквивалентности в X, а Y — фактор-пространство X/r. Обозначим через π каноническое отображение из X на Y. Пусть μ — конечная мера на X. Множество

$E \subset Y$ является борелевым множеством тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(Y)$ — борелево множество в X. Это дает борелеву структуру в Y, индуцированную борелевой структурой в X. Определяем меру $\tilde{\mu}$ на Y формулой

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(\pi^{-1}E), \quad E \text{ — борелево множество в } Y. \tag{14}$$

Если борелева структура на Y сепарабельна (т. е. существует последовательность борелевых множеств в Y, которые отделяют точки в Y), то мы имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Для каждого $y \in Y$ существует мера μ_y на X с носителем $\pi^{-1}(y)$ (т. е. $\mu_y(X - \pi^{-1}(y)) = 0$), такая, что для каждой функции $f \in L^1(X, \mu)$ имеем*

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_Y d\tilde{\mu}(y) \int_X f(x)\,d\mu_y(x). \tag{15}$$

(Доказательство см. в [552], § 11.)

§ 4. Комментарии и дополнения

А. Следующая теорема дает полезную формулу разложения меры, соответствующую разложению Ивасавы.

Теорема 1. *Пусть G — связная полупростая группа Ли, и пусть $\mathcal{K}\mathcal{A}_p\mathcal{N}$ — ее разложение Ивасавы. Пусть dk, da и dn — левоинвариантные меры на $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{N}$ соответственно. Тогда левоинвариантная мера dg на G может быть нормализована так, что*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{\mathcal{K}\times\mathcal{A}_p\times\mathcal{N}} f(kan)\exp[2\rho(\log a)]\,dk\,da\,dn =$$
$$= \int_{\mathcal{K}\times\mathcal{A}_p\times\mathcal{N}} f(kna)\,dk\,dn\,da, \tag{1}$$

где $\log a$ обозначает единственный элемент X в алгебре Ли H_p, для которого $\exp X = a$, и $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in B^+}\alpha$.

[См. формулу (1.6.18).]
(Доказательство см. в [390], гл. X, § 1.)

Б. *Исторические замечания*

После завершения классификации комплексных простых групп Ли [158] и вещественных простых групп Ли [159] Картан начал в 1925 г. анализ свойств однородных пространств, сопоставляемых с простыми группами Ли. В ряде впечатляющих работ [161—165] он завершил классификацию глобальных неприводимых