$E \subset Y$ является борелевым множеством тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(Y)$ — борелево множество в X. Это дает борелеву структуру в Y, индуцированную борелевой структурой в X. Определяем меру $\tilde{\mu}$ на Y формулой

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(\pi^{-1}E), \quad E \text{ — борелево множество в } Y. \tag{14}$$

Если борелева структура на Y сепарабельна (т. е. существует последовательность борелевых множеств в Y, которые отделяют точки в Y), то мы имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Для каждого $y \in Y$ существует мера μ_y на X с носителем $\pi^{-1}(y)$ (т. е. $\mu_y(X - \pi^{-1}(y)) = 0$), такая, что для каждой функции $f \in L^1(X, \mu)$ имеем*

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_Y d\tilde{\mu}(y) \int_X f(x)\,d\mu_y(x). \tag{15}$$

(Доказательство см. в [552], § 11.)

§ 4. Комментарии и дополнения

А. Следующая теорема дает полезную формулу разложения меры, соответствующую разложению Ивасавы.

Теорема 1. *Пусть G — связная полупростая группа Ли, и пусть $\mathcal{K}\mathcal{A}_p\mathcal{N}$ — ее разложение Ивасавы. Пусть dk, da и dn — левоинвариантные меры на $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{N}$ соответственно. Тогда левоинвариантная мера dg на G может быть нормализована так, что*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{\mathcal{K}\times\mathcal{A}_p\times\mathcal{N}} f(kan)\exp[2\rho(\log a)]\,dk\,da\,dn =$$
$$= \int_{\mathcal{K}\times\mathcal{A}_p\times\mathcal{N}} f(kna)\,dk\,dn\,da, \tag{1}$$

где $\log a$ обозначает единственный элемент X в алгебре Ли H_p, для которого $\exp X = a$, и $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in B^+}\alpha$.

[См. формулу (1.6.18).]
(Доказательство см. в [390], гл. X, § 1.)

Б. *Исторические замечания*

После завершения классификации комплексных простых групп Ли [158] и вещественных простых групп Ли [159] Картан начал в 1925 г. анализ свойств однородных пространств, сопоставляемых с простыми группами Ли. В ряде впечатляющих работ [161—165] он завершил классификацию глобальных неприводимых

симметрических римановых пространств. Он также дал геометрическое описание всех этих пространств.

Классификация симметрических пространств с некомпактными стационарными подгруппами дана Бергером [110].

Описание квазиинвариантных мер на однородных пространствах в виде, представленном теоремой 3.1, было дано Люмисом [544].

§ 5. Упражнения

§ 2.1. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$ и $H = \mathrm{U}(n-1)$. Покажите, что пространство $X = G/H$ симметрично и может быть представлено в виде многообразия в C^n, заданного формулой

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n = 1. \tag{1}$$

§ 2.2. Пусть $G = \mathrm{SO}(p, q)$ и $H = \mathrm{SO}(p-1, q)$. Покажите, что пространство $X = G/H$ симметрично и может быть представлено как гиперболоид, заданный формулой

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1. \tag{2}$$

§ 2.3. Покажите, что стационарной группой конуса

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{3}$$

является группа $H = T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$.

Указание. Используйте описание пространства Минковского M с помощью 2×2-матриц, заданное соответствием

$$M \ni x \to X = x^\mu \sigma_\mu$$

(см. упражнение 3.7.3), и найдите стационарную подгруппу точки $x = (1, 0, 0, 1)$ в этой реализации.

§ 2.4. Покажите, что симметрическое пространство $X = \mathrm{SU}(1, 1)/\mathrm{U}(1)$ может быть реализовано как единичный диск $D = \{z \in C: |z| < 1\}$. Покажите, что действие группы $\mathrm{SU}(1, 1)$ на D задается дробно-линейными преобразованиями $\left(g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in C, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right)$

$$g: z \to \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}. \tag{4}$$

§ 2.5. Покажите, что метрический тензор Римана на пространстве D предыдущей задачи имеет вид

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (1 - |z|^2)^{-2} \delta_{ij}, \\ g^{ij} &= (1 - |z|^2)^2 \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5}$$