симметрических римановых пространств. Он также дал геометрическое описание всех этих пространств.

Классификация симметрических пространств с некомпактными стационарными подгруппами дана Бергером [110].

Описание квазиинвариантных мер на однородных пространствах в виде, представленном теоремой 3.1, было дано Люмисом [544].

§ 5. Упражнения

§ 2.1. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$ и $H = \mathrm{U}(n-1)$. Покажите, что пространство $X = G/H$ симметрично и может быть представлено в виде многообразия в C^n, заданного формулой

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n = 1. \tag{1}$$

§ 2.2. Пусть $G = \mathrm{SO}(p, q)$ и $H = \mathrm{SO}(p-1, q)$. Покажите, что пространство $X = G/H$ симметрично и может быть представлено как гиперболоид, заданный формулой

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1. \tag{2}$$

§ 2.3. Покажите, что стационарной группой конуса

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{3}$$

является группа $H = T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$.

Указание. Используйте описание пространства Минковского M с помощью 2×2-матриц, заданное соответствием

$$M \ni x \to X = x^\mu \sigma_\mu$$

(см. упражнение 3.7.3), и найдите стационарную подгруппу точки $x = (1, 0, 0, 1)$ в этой реализации.

§ 2.4. Покажите, что симметрическое пространство $X = \mathrm{SU}(1, 1)/\mathrm{U}(1)$ может быть реализовано как единичный диск $D = \{z \in C: |z| < 1\}$. Покажите, что действие группы $\mathrm{SU}(1, 1)$ на D задается дробно-линейными преобразованиями $\left(g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in C, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right)$

$$g: z \to \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}. \tag{4}$$

§ 2.5. Покажите, что метрический тензор Римана на пространстве D предыдущей задачи имеет вид

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (1 - |z|^2)^{-2} \delta_{ij}, \\ g^{ij} &= (1 - |z|^2)^2 \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5}$$

и что элемент объема $d\mu$ на D задается формулой

$$d\mu(z) = \sqrt{(\det g)}\, dx\, dy = [1 - (x^2 + y^2)]^{-2}\, dx\, dy. \tag{6}$$

§ 3.1. Покажите, что инвариантный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ на гиперболоиде (2) имеет вид

$$g_{\alpha\beta}(t) = g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial t^\beta}, \tag{7}$$

где $\{x^i\}_{i=1}^{p+q}$ — декартовы координаты на пространстве Минковского $M^{p,q}$, в которое гиперболоид (2) вложен и $\{t^\alpha\}_{\alpha=1}^{p+q-1}$ — любые «внутренние» координаты на гиперболоиде (например, сферические).

§ 3.2. Найдите меру на конусе (3), инвариантную относительно SO (3, 1).

§ 3.3. Покажите, что SO (p, q)-инвариантная мера на гиперболоиде (2) имеет вид

$$d\mu(t) = (\det g)^{1/2} \prod_{\alpha=1}^{p+q-1} dt^\alpha,$$

где $g_{\alpha\beta}(t)$ задается формулой (7).