Глава 5

Представления групп

§ 1. Основные понятия

Пусть G — локально компактная сепарабельная унимодулярная топологическая группа, и пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство.

Определение 1. Отображение $x \to T_x$ группы G в пространство $L(H)$ линейных ограниченных операторов в H называют *представлением* группы G в H, если удовлетворяются следующие условия:

$$T_{xy} = T_x T_y, \quad T_e = I. \tag{1}$$

Условие $T_{xy} = T_x T_y$ означает, что отображение $x \to T_x$ является гомоморфизмом группы G в множество линейных операторов в H. Условие $T_e = I$ обеспечивает обратимость операторов, которыми задается представление $x \to T_x$; действительно,

$$T_x T_{x^{-1}} = T_{x^{-1}} T_x = T_e = I.$$

Следовательно,

$$T_x^{-1} = T_{x^{-1}}.$$

Кроме того, на представление $x \to T_x$ группы G в H также налагаются определенные условия непрерывности. Говорят, что представление *сильно непрерывно*, если для всех $u \in H$ отображение $x \to T_x u$ является непрерывным отображением группы G в H. Это означает, что для любого $x_0 \in G$ и для всех векторов $u \in H$

$$\| T_x u - T_{x_0} u \| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{2}$$

Условие (2) эквивалентно следующему, вообще говоря, более сильному условию, которое обычно дается в определении представления топологических групп.

Отображение $(u, x) \to T_x u$ является непрерывным отображением $H \times G$ в H.

Доказательство. Необходимо показать, что при $x \to x_0 \in G$ и $u \to u_0 \in H$

$$T_x u \to T_{x_0} u_0.$$

Пусть K — компактная окрестность точки x_0 в G. Согласно условию (2), для любого $u \in H$ множество $S = \{T_x u : x \in K\}$ является компактным (и, следовательно, ограниченным) подмножеством в H. Из принципа равномерной ограниченности (см. приложение А.4) вытекает существование константы C_k, такой, что для всех $x \in K$

$$\|T_x\| \leqslant C_k. \tag{3}$$

Без потери общности можно предположить, что $x \in K$. Тогда

$$\|T_x u - T_{x_0} u_0\| \leqslant \|T_x u - T_x u_0\| + \|T_x u_0 - T_{x_0} u_0\| \leqslant C_k \|u - u_0\| + \\ + \|T_x u_0 - T_{x_0} u_0\|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, так как $u \to u_0$. Второе слагаемое стремится к нулю в силу условия (2). Следовательно, $T_x u \to T_{x_0} u_0$ при $x \to x_0 \in G$ и $u \to u_0 \in H$, и отображение $(u, x) \to T_x u$ является непрерывным отображением $H \times G$ в H.

Говорят, что представление *ограничено*, если $\sup \|T_x\| < \infty$. Из (3) следует, что представление любой локально компактной сепарабельной топологической группы ограничено на любом компактном подмножестве $K \subset G$. В частности, представление компактной группы ограничено.

Говорят, что представление *унитарно*, если всякий оператор T_x, $x \in G$, унитарен в H, и *тривиально*, если $T_x = I$ для всех x из G.

Представление $x \to T_x$ группы G для краткости обозначаем символом T. Пространство H, в котором действует представление T, называется *пространством представления* T.

Определение 1 фактически определяет линейные представления группы G. В дальнейшем под представлением топологической локально компактной сепарабельной группы G будем понимать линейное сильно непрерывное представление в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H, если не уточняется другое (например, нелинейное, слабо непрерывное или разрывное).

Пример 1. Пусть $G = R^1$, а H — произвольное гильбертово пространство. Рассмотрим отображения

$$1)\ R^1 \ni x \to T_x = \exp[ipx] \cdot I, \quad p \in R^1,$$
$$2)\ R^1 \ni x \to T'_x = \exp[px] \cdot I, \quad p \in R^1.$$

Очевидно, что эти отображения удовлетворяют условиям (1) и (2). Следовательно, T и T' являются представлениями группы R^1. Представление T' не ограничено на R^1, хотя оно ограничено на каждом ограниченном подмножестве из R^1.

Пример 2. Пусть G — топологическая группа преобразований, действующая непрерывно на локально компактном про-

странстве S с мерой и оставляющая эту меру инвариантной. Положим $H = L^2(S, \mu)$. Пусть отображение $x \to T_x$ определено посредством левых сдвигов, т. е.

$$(T_x u)(s) = u(x^{-1}s), \quad u \in H, \quad s \in S, \quad x \in G. \tag{4}$$

Ясно, что каждый оператор T_x линеен. Более того,

$$[T_x(T_y u)](s) = (T_y u)(x^{-1}s) = u(y^{-1}x^{-1}s) = (T_{xy}u)(s),$$

т. е.

$$T_x T_y = T_{xy}, \quad T_e = I.$$

Следовательно, отображение (4) определяет представление группы G в H.

Инвариантность меры предполагает, что

$$(T_x u,\ T_x v) = \int u(x^{-1}s)\overline{v(x^{-1}s)}\,d\mu(s) = (u, v),$$

т. е. что оператор T_x изометричен, а поскольку его область определения D_{T_x} совпадает с H, каждый оператор T_x унитарен.

Если $u \in C_0(S)$, то, согласно равномерной непрерывности,

$$\sup |u(x^{-1}s) - u(s)| \to 0$$

при $x \to e$ (см. утверждение 2.2.4). Более того, существует фиксированное компактное множество $K \subset S$, содержащее носители функций u и $T_x u$ для x, достаточно близких к e. При этом

$$\|T_x u - u\| = \left[\int_S |u(x^{-1}s) - u(s)|^2 d\mu(s)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s \in K} |u(x^{-1}s) - u(s)| \sqrt{\mu(K)} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to e.$$

Свойство непрерывности при $x \to y$ получается заменой u на $T_y u$.

Если $u \in L^2(S, \mu)$ и $\varepsilon > 0$, то существует $v \in C_0(S)$, такое, что $\|u - v\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|T_x u - u\| \leqslant \|T_x(u - v)\| + \|T_x v - v\| + \|v - u\|,$$

и инвариантность μ относительно G предполагает, что

$$\|T_x u - u\| \leqslant 2\varepsilon + \|T_x v - v\|.$$

Следовательно, $\|T_x u - u\| \leqslant 3\varepsilon$, если x достаточно близко к e. Таким образом, отображение (4) определяет сильно непрерывное унитарное представление группы G в $L^2(S, \mu)$.

Если $S = G$, то представление (4) называется *левым регулярным представлением*. Если $S = G/K$, где K — замкнутая подгруппа в G, то представление (4) называется *квазирегулярным представлением*. Ясно, что с помощью правых сдвигов

$$T_x u(y) = u(yx) \tag{5}$$

подобным образом можно определить *правое регулярное представление* группы G в $L^2(G, \mu)$.

Говорят, что представление $x \to T_x$ группы G в H *слабо непрерывно*, если для произвольных $u, v \in H$

$$(T_x u, v) \to (T_{x_0} u, v) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{6}$$

Для унитарных представлений слабая и сильная непрерывности эквивалентны. В самом деле, имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть T — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие формулировки эквивалентны:*

1° *T сильно непрерывно.*

2° *T слабо непрерывно.*

3° *Функция $x \to (T_x u, u)$ непрерывна в e для всякого $u \in H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $1° \Rightarrow 2°$ и $2° \Rightarrow 3°$. Поэтому достаточно показать, что $3° \Rightarrow 1°$. Действительно, для любых $u \in H$ и $x, y \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \|T_x u - T_y u\|^2 &= (T_x u, T_x u) - (T_x u, T_y u) - (T_y u, T_x u) + (T_y u, T_y u) = \\ &= 2(u, u) - 2\operatorname{Re}(T_y u, T_x u) \leqslant 2|(u, u) - (T_y u, T_x u)| = \\ &= 2|(u, u) - (T_{x^{-1}y} u, u)|. \end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, если имеет место $3°$, то ввиду (7) $\|T_x u - T_y u\| \to 0$ при $x \to y$. Таким образом, $3° \Rightarrow 1°$.

Замечание. Для унитарных представлений слабая непрерывность предполагает также сильную левую равномерную непрерывность [см. (2.2.13)]. Действительно,

$$\|T_x u - T_y u\| = \|u - T_{x^{-1}y} u\|.$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует окрестность V_ε точки e, такая, что

$$\|T_x u - T_y u\| < \varepsilon, \quad \text{как только } x^{-1}y \in V_\varepsilon.$$

Интересно, что унитарное представление $x \to T_x$ группы G может не быть непрерывным. Этот важный факт иллюстрируется следующим примером.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = R$, и пусть $\{\xi^\alpha\}$ — базис Гамеля [1]) для R. Положим $\xi^1 = 1$. Пусть ξ^2 — любой другой базисный элемент, который, ввиду r-независимости базисных элементов, должен быть иррациональным. Ясно, что любой элемент $x \in G$ может быть записан в виде $x = \sum r_\alpha \xi^\alpha$. Рассмотрим отображение

$$\varphi: x \to T_x = \exp(ir_2) I, \tag{8}$$

---

[1]) Базисом Гамеля в R является (несчетный) базис в R при условии, что R рассматривается как векторное пространство над полем Q рациональных чисел.

где $x \in G$ и I — единичный оператор в гильбертовом пространстве H, в котором действуют операторы T_x. Мы имеем соотношения $T_{xy} = T_x T_y$ и $T_e = I$. Более того, $T_x = I$, если x рационально (так как в этом случае $x = x\xi^1$) и $T_{\xi^2} = \exp i \cdot I$. Следовательно, отображение (8) приводит к разрывному унитарному представлению группы G в H.

Замечание. Представления топологической группы G, заданные определением 1, не исчерпывают всех возможных представлений группы G, которые встречаются в теоретической физике или геометрии. Например, если пространством представления является само групповое многообразие, то отображение $x \to T_x$, заданное в виде

$$T_x^R y = yx, \quad \text{или} \quad T_x^L y = x^{-1}y, \tag{9}$$

удовлетворяет условиям (1) и ввиду непрерывности группового умножения также удовлетворяет условиям непрерывности. Однако отображение $x \to T_x$ является нелинейным, даже если группа G коммутативна. Следовательно, возникает новый тип представлений группы G. Подобная ситуация имеет место, если, например, G действует на кривом однородном пространстве G/K или на нелинейном дифференцируемом многообразии M. Чтобы отличать их от линейных представлений, их обычно называют *реализациями*.

Пусть φ — гомоморфизм $x \to T_x$ из определения 1. Множество K всех элементов из G, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = I$, $x \in G$, называется *ядром* гомоморфизма φ. Если $x, y \in K$, то $xy \in K$ и $x^{-1} \in K$. Более того, если $x \in K$ и $y \in G$, то $\varphi(yxy^{-1}) = T_y T_{y^{-1}} = I$, т. е. $yxy^{-1} \in K$. Поэтому K является инвариантной подгруппой в G.

Представление $x \to T_x$ группы G называется *точным*, если отображение $x \to T_x$ взаимно однозначно. В этом случае $K = \{e\}$. Если $K \neq \{e\}$, то все элементы класса левосмежных элементов xK для фиксированного $x \in G$ представляются одним и тем же оператором, а два разных класса левосмежных элементов — разными операторами. Следовательно, гомоморфизм $\varphi: x \to T_x$, который приводит к представлению группы G, не являющемуся точным, может рассматриваться как точное представление факторгруппы G/K, заданное изоморфизмом $\varphi: xK \to T_x$.

Заметим, что простые группы Ли с тривиальными дискретными центрами, в частности $SU(n)/Z_n$, где

$$Z_n = \left\{\exp\left[\frac{2\pi i}{k}\right] e, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\right\},$$

не имеют инвариантных подгрупп. Следовательно, все представления простых групп Ли с тривиальными дискретными центрами являются либо точными, либо тривиальными.

Матричная форма представлений

Пусть $\{e_i\}_1^N$, $N < \infty$, — ортонормированный базис в пространстве H представления. Оператор T_x, $x \in G$, переводит базисный элемент e_j в $T_x e_j \in H$. Последний может быть представлен в виде

$$T_x e_j = D_{ij}(x)\, e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Следовательно,

$$D_{ij}(x) = (T_x e_j, e_i), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Поэтому оператор T_x в базисе $\{e_i\}_1^N$ может быть представлен конечной или бесконечной матрицей $[D_{ij}(x)]$. Из утверждения 1 следует, что каждый матричный элемент (11) является непрерывной функцией на G. Матрица оператора T_{xy} является произведением матриц (11), т. е.

$$D_{ij}(xy) = D_{ik}(x)\, D_{kj}(y). \tag{12}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D_{ij}(xy) &= (T_{xy} e_j, e_i) = (T_x T_y e_j, e_i) = (T_y e_j, T_x^* e_i) = \\ &= (T_y e_j, e_k)(e_k, T_x^* e_i) = (T_y e_j, e_k)(T_x e_k, e_i) = \\ &= D_{ik}(x)\, D_{kj}(y). \end{aligned}$$

Ясно, что матричная форма (11) оператора T_x зависит от выбора базиса в пространстве H. Если U — унитарный оператор, отображающий H на себя, и если $h_i = Ue_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то базис $\{h_i\}_1^N$ ортонормирован и

$$U^{-1} D(x)\, U \tag{13}$$

является матричной формой оператора T_x в новом базисе. Здесь матричные элементы U_{ij} оператора $U = \{U_{ij}\}$ имеют вид

$$U_{ij} = (Ue_j, e_i) = (h_j, e_i).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(h)}(x) &= (T_x U e_j, Ue_i) = (T_x U e_j, e_s)(e_s, Ue_i) = \\ &= (Ue_j, T_x^* e_s)(e_s, Ue_i) = (Ue_j, e_p)(e_p, T_x^* e_s)(e_s, Ue_i) = \\ &= U_{is}^{-1} D_{sp}(x)\, U_{pj}. \end{aligned}$$

Унитарный оператор T_x представляется унитарной матрицей $[D_{ij}(x)]$ только в том случае, когда базис $\{e_i\}_1^N$ ортогонален.

Пусть T — матричное представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad x \to \check{T}_x = T^T_{x^{-1}}, \\ &2^\circ \quad x \to \hat{T}_x = T^{*T}_x = \overline{T}_x, \\ &3^\circ \quad x \to \tilde{T}_x = T^*_{x^{-1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Легко проверить, что любое из отображений (14) определяет представление группы G. Например,

$$\tilde{T}_e = I \quad \text{и} \quad \tilde{T}_{xy} = T^*_{(xy)^{-1}} = (T_{y^{-1}}T_{x^{-1}})^* = \tilde{T}_x\tilde{T}_y.$$

Непрерывность отображений (14) следует из того факта, что операции «T» и «*» непрерывны.

Представления (14) 1°, (14) 2° и (14) 3° называют *контраградиентным, сопряженным и сопряженно-контраградиентным* представлению T соответственно. Для унитарных представлений контраградиентное и сопряженное представления совпадают.

§ 2. Эквивалентность представлений

Пусть $x \to T_x$ — представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H. Пусть S — ограниченный изоморфизм из H на гильбертово пространство H'. Тогда отображение φ: $x \to T'_x = ST_xS^{-1}$ определяет представление группы G в H'. Действительно,

$$T'_{xy} = ST_xS^{-1}ST_yS^{-1} = T'_xT'_y, \quad T'_e = I \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} \|T'_xu' - T'_yu'\| &= \|S(T_xS^{-1}u' - T_yS^{-1}u')\| \leqslant \\ &\leqslant \|S\|\|T_xu - T_yu\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to y. \end{aligned}$$

Таким образом, отправляясь от заданного представления $x \to T_x$ группы G, можно построить целый класс новых представлений, действующих в одном и том же или изоморфных пространствах. Однако эти представления не являются существенно различными. Поэтому мы собираем их в один класс представлений, используя понятие эквивалентности представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Представление $x \to T_x$ топологической группы G в гильбертовом пространстве H *эквивалентно* представлению $x \to T'_x$ в H', если существует ограниченный изоморфизм S из H на H', такой, что

$$ST_x = T'_xS \quad \text{для всех} \quad x \in G. \tag{2}$$