Пусть T — матричное представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad x \to \check{T}_x = T^T_{x^{-1}}, \\ &2^\circ \quad x \to \hat{T}_x = T^{*T}_x = \overline{T}_x, \\ &3^\circ \quad x \to \tilde{T}_x = T^*_{x^{-1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Легко проверить, что любое из отображений (14) определяет представление группы G. Например,

$$\tilde{T}_e = I \quad \text{и} \quad \tilde{T}_{xy} = T^*_{(xy)^{-1}} = (T_{y^{-1}}T_{x^{-1}})^* = \tilde{T}_x\tilde{T}_y.$$

Непрерывность отображений (14) следует из того факта, что операции «T» и «*» непрерывны.

Представления (14) 1°, (14) 2° и (14) 3° называют *контраградиентным, сопряженным и сопряженно-контраградиентным* представлению T соответственно. Для унитарных представлений контраградиентное и сопряженное представления совпадают.

§ 2. Эквивалентность представлений

Пусть $x \to T_x$ — представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H. Пусть S — ограниченный изоморфизм из H на гильбертово пространство H'. Тогда отображение φ: $x \to T'_x = ST_xS^{-1}$ определяет представление группы G в H'. Действительно,

$$T'_{xy} = ST_xS^{-1}ST_yS^{-1} = T'_xT'_y, \quad T'_e = I \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} \|T'_xu' - T'_yu'\| &= \|S(T_xS^{-1}u' - T_yS^{-1}u')\| \leqslant \\ &\leqslant \|S\|\|T_xu - T_yu\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to y. \end{aligned}$$

Таким образом, отправляясь от заданного представления $x \to T_x$ группы G, можно построить целый класс новых представлений, действующих в одном и том же или изоморфных пространствах. Однако эти представления не являются существенно различными. Поэтому мы собираем их в один класс представлений, используя понятие эквивалентности представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Представление $x \to T_x$ топологической группы G в гильбертовом пространстве H *эквивалентно* представлению $x \to T'_x$ в H', если существует ограниченный изоморфизм S из H на H', такой, что

$$ST_x = T'_xS \quad \text{для всех} \quad x \in G. \tag{2}$$

В этом случае мы будем писать $T_x \simeq T'_x$. Эта операция «$\simeq$» рефлексивна, симметрична и транзитивна. Это означает, что

$$T \simeq T,$$
$$T \simeq T' \Rightarrow T' \simeq T, \tag{3}$$
$$T \simeq T' \quad \text{и} \quad T' \simeq T'' \Rightarrow T \simeq T''.$$

Поэтому она является отношением эквивалентности. Следовательно, она разбивает множество всех представлений группы G на непересекающиеся классы эквивалентных представлений.

Дальше мы вводим более узкое понятие унитарной эквивалентности двух представлений в гильбертовых пространствах H и H'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два представления $x \to T_x$ в H и $x \to T'_x$ в H' *унитарно эквивалентны*, если существует унитарный изоморфизм $U: H \to H'$, такой, что $UT_x = T'_x U$ для каждого $x \in G$.

ПРИМЕР 1. Пусть T^L и T^R — левое и правое регулярные представления группы G. Инволюция $I: u(x) \to u(x^{-1})$ определяет унитарное отображение из H на себя. Мы имеем

$$(IT^R_x u)(y) = (T^R_x u)(y^{-1}) = u(x^{-1}y^{-1}) = (Iu)(x^{-1}y) = (T^L_x Iu)(y).$$

Поэтому

$$IT^R_x = T^L_x I.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Два эквивалентные унитарные представления унитарно эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв сопряжения от обеих частей соотношения (2), получаем

$$T_x S^* = S^* T'_x. \tag{4}$$

Следовательно, из (4) и (2) имеем

$$SS^* T'_x = ST_x S^* = T'_x SS^*,$$

т. е. каждый T'_x коммутирует с положительным эрмитовым оператором SS^* и поэтому также с $A = \sqrt{SS^*}$. Оператор $A^{-1}S$ является унитарным оператором, который удовлетворяет условию (2). Действительно,

$$A^{-1}ST = A^{-1}T'S = T'A^{-1}S.$$

Поэтому T и T' унитарно эквивалентны.

Два эквивалентных унитарных представления $x \to T_x$ в H и $x \to T'_x$ в H' могут быть описаны одними и теми же матрицами при надлежащем выборе базисов в H и H'. Действительно, пусть

S — изоморфизм из H на H', такой, что $ST_x = T'_x S$, и пусть $\{e_i\}_1^N$, $N \leqslant \infty$, — базис в H. Тогда, взяв в качестве базиса в H' множество $\{e'_i = Se_i\}_1^N$, получаем

$$T_x e_j = D_{ij}(x) e_i \tag{5}$$

и

$$D'_{ij}(x) e'_i = T'_x e'_j = T'_x S e_j = S T_x e_j = S D_{ij}(x) e_i = D_{ij}(x) e'_i,$$

т. е. обе матрицы совпадают.

Пусть T и T' — представления группы G в H и H' соответственно. Ограниченный оператор S из H в H' называется *переплетающим оператором* для T и T', если $ST_x = T'_x S$ для каждого $x \in G$. Множество всех переплетающих операторов образует линейное пространство, которое обозначаем через $R(T, T')$. Утверждение 1 может теперь быть переформулировано так: два унитарные представления T и T' эквивалентны тогда и только тогда, когда в $R(T, T')$ существует унитарный оператор из H на H'.

Заметим, что при $T = T'$ $R(T, T)$ — алгебра.

§ 3. Неприводимость и приводимость

Пусть $x \to T_x$ — представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H. Подпространство или подмножество H_1 пространства H *инвариантно* (относительно T), если $u \in H_1$ предполагает, что $T_x u \in H_1$ для каждого $x \in G$.

Каждое представление имеет по крайней мере два инвариантных подпространства: нулевое пространство $\{0\}$ и все пространство H. Эти инвариантные подпространства называют тривиальными. Нетривиальные инвариантные подпространства или подмножества называются *собственными*. Теперь мы введем понятие неприводимости, которое играет существенную роль в теории представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (Алгебраическая неприводимость.) Представление $x \to T_x$ группы G в H называют *алгебраически неприводимым*, если оно не имеет собственных инвариантных подмножеств в H.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Топологическая неприводимость.) Представление $x \to T_x$ топологической группы G в H называют *топологически неприводимым*, если оно не имеет собственных *замкнутых* инвариантных подпространств.

Ясно, что алгебраическая неприводимость предполагает топологическую неприводимость. Представление, которое имеет собственные инвариантные подпространства, называют *приводимым*. Ниже термин «неприводимое» («приводимое») обозначает тополо-