мальное число попарно коммутирующих инвариантных операторов. Итак, в противоположность фактор-представлениям в случае представлений, свободных от кратностей, генераторы алгебры $R(T, T)$ обеспечивают разделение представлений с помощью собственных значений.

§ 4. Циклические представления

При анализе свойств представлений заданной группы G полезно разложить представление T на более элементарные составляющие. Для этой цели могут быть полезны циклические представления.

Представление T группы G в H называют *циклическим*, если существует вектор $v \in H$ (называемый *циклическим вектором* для T), такой, что замыкание линейной оболочки всех $T_x v$ совпадает с самим H. Следующая теорема позволяет сосредоточить наше внимание в случае унитарных представлений только на циклических представлениях.

Теорема 1. *Каждое унитарное представление T группы G в H является прямой суммой циклических подпредставлений.*

Доказательство. Пусть $v_1 \in H$ — любой ненулевой вектор, и пусть H_{v_1} — замыкание линейной оболочки векторов $T_x v_1$, $x \in G$. Пространство H_{v_1} инвариантно относительно T. В самом деле, пусть $\tilde{H}_{v_1}$ — линейная оболочка всех векторов $T_x v_1$; тогда для каждого $u \in H_{v_1}$ существует последовательность $\{u_n\}$ векторов $u_n \in \tilde{H}_{v_1}$, которые сходятся к u. Ясно, что $T_x u_n \in \tilde{H}_{v_1}$. Непрерывность каждого T_x предполагает, что $T_x u_n \to T_x u$. Поэтому вектор $T_x u$ лежит в H_{v_1} и, следовательно, H_{v_1} инвариантно. Итак, подпредставление ${}^{H_{v_1}}T$ циклично и v_1 — циклический вектор для него. Если $H_{v_1} = H$, то доказательство завершено. В противном случае выбираем любой ненулевой вектор v_2 в $H_{v_1}^{\perp} = H - H_{v_1}$ и рассматриваем замкнутую линейную оболочку H_{v_2}, которая инвариантна относительно T и ортогональна к H_{v_1}, и так далее.

Пусть τ обозначает семейство всех наборов $\{H_{v_i}\}$, каждый из которых составлен из последовательности попарно ортогональных инвариантных и циклических подпространств, и упорядочиваем семейство τ посредством отношения включения $\subset$. Тогда τ — упорядоченное множество, к которому применима лемма Цорна (см. приложение А.1), которая гарантирует существование максимального набора $\{H_{v_i}\}_{\text{макс}}$. Из сепарабельности пространства H следует, что существует не более чем счетное число подпространств в $\{H_{v_i}\}_{\text{макс}}$, и их прямая сумма согласно максимальности $\{H_{v_i}\}_{\text{макс}}$ должна совпадать с H.

Используя теорему 1 мы можем теперь дать удобный критерий неприводимости унитарных представлений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Унитарное представление T группы G в H неприводимо тогда и только тогда, когда каждый ненулевой вектор $u \in H$ цикличен для T.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T неприводимо, то из доказательства теоремы 1 следует, что каждый ненулевой вектор цикличен для T. Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что H_1 — нетривиальное инвариантное подпространство в H, и выберем вектор $0 \neq v_1 \in H_1$. В силу инвариантности H_1 мы имеем $T_x v_1 \in H_1$. Более того, замыкание линейной оболочки всех $T_x v_1$, которое по предположению совпадает со всем H, содержится в H_1. Поэтому мы приходим к противоречию. Следовательно, H не содержит нетривиальных инвариантных подпространств и поэтому T неприводимо.

Более того, мы имеем следующий удобный критерий унитарной эквивалентности циклических представлений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть T и T' — унитарные циклические представления группы G в H и H' с циклическими векторами $v \in H$ и $v' \in H'$ соответственно.*

Если

$$(T_x v, v)_H = (T'_x v', v')_{H'} \quad \text{для каждого} \quad x \in G, \tag{1}$$

то T унитарно эквивалентно T'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{H}$ (соответственно $\tilde{H}'$) — линейная оболочка всех векторов $T_x v$ (соответственно $T'_x v'$), которая плотна в H (соответственно в H'). Тогда любой вектор $u \in \tilde{H}$ имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_{x_i} v. \tag{2}$$

Мы определяем отображение S формулой

$$Su = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T'_{x_i} v'. \tag{3}$$

Тогда, согласно (3) и (1),

$$\|Su\|^2_{H'} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j (T'_{x_i} v', T'_{x_j} v')_{\tilde{H}'} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j \left(T'_{x_j^{-1} x_i} v', v'\right)_{\tilde{H}'} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j \left(T_{x_j^{-1} x_i} v, v\right)_{\tilde{H}} = \|u\|^2_{\tilde{H}}.$$

Поэтому S — линейное изометрическое (следовательно, непрерывное) отображение, такое, что $ST_x u = T'_x Su$ для всех $u \in H$.

Итак, S может быть однозначно расширено до унитарного отображения $\bar{S}$ из H на H', такого, что $\bar{S}T = T'\bar{S}$. Следовательно, T унитарно эквивалентно T'.

§ 5. Тензорное произведение представлений

А. *Тензорное произведение пространств и операторов*

Определение 1. Пусть $\overset{1}{E}$ и $\overset{2}{E}$ — два векторных пространства. Пусть $\overset{1}{E} \square \overset{2}{E}$ — векторное пространство, элементы которого являются формальными линейными комбинациями

$$\sum c_{x,y}(x,\ y), \quad x \in \overset{1}{E}, \quad y \in \overset{2}{E},$$

с конечным числом отличных от нуля коэффициентов $c_{x,y} \in C$. Пусть N обозначает подпространство в $\overset{1}{E} \square \overset{2}{E}$, натянутое на все векторы вида

$$(x,\ y_1 + y_2) - (x,\ y_1) - (x,\ y_2), \quad (x_1 + x_2,\ y) - (x_1,\ y) - (x_2,\ y),$$
$$(\lambda x,\ y) - \lambda(x,\ y), \quad (x,\ \lambda y) - \lambda(x,\ y).$$

Тогда тензорное произведение определяется как фактор-пространство

$$\overset{1}{E} \otimes \overset{2}{E} = \overset{1}{E} \square \overset{2}{E}/N.$$

Пусть φ_2 — ограничение канонического отображения $\psi: \overset{1}{E} \square \overset{2}{E} \to \overset{1}{E} \otimes \overset{2}{E}$ до декартового произведения $\overset{1}{E} \times \overset{2}{E}$; тогда мы полагаем $\varphi[(x,\ y)] \equiv x \otimes y$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} &1)\ x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ &2)\ (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ &3)\ (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\{\overset{k}{e}_i\}_{i=1}^{\dim \overset{k}{E}}$, $k = 1,\ 2,$ — базисы в $\overset{1}{E}$ и $\overset{2}{E}$ соответственно. Тогда отображение φ сопоставляет каждой паре $(\overset{1}{e}_i,\ \overset{2}{e}_k)$ из $\overset{1}{E} \times \overset{2}{E}$ элемент $\overset{1}{e}_i \otimes \overset{2}{e}_k$; для $x = x^i \overset{1}{e}_i$ и $y = y^k \overset{2}{e}_k$, где лишь конечное число координат отлично от нуля, имеем

$$x \otimes y = x^i y^k \overset{1}{e}_i \otimes \overset{2}{e}_k. \tag{2}$$

Если $\overset{1}{E}$ и $\overset{2}{E}$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(.,.)_i$, $i = 1,\ 2$, то скалярное произведение в $\overset{1}{E} \otimes \overset{2}{E}$ может быть определено формулой

$$(x_1 \otimes y_1,\ x_2 \otimes y_2) \equiv (x_1,\ x_2)_1 (y_1,\ y_2)_2. \tag{3}$$