

Заметим, что даже если представления $\overset{1}{T}$ и $\overset{2}{T}$ группы G неприводимы, то внутреннее тензорное произведение $\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T}$ в общем сильно приводимо, т. е.

$$\overset{1}{T}_g \otimes \overset{2}{T}_g \simeq \bigoplus m_\lambda \overset{\lambda}{T}_g, \quad (12)$$

где $\overset{\lambda}{T}$ — неприводимые представления группы G , а m_λ — кратность представления $\overset{\lambda}{T}$ в тензорном произведении $\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T}$.

Определение кратностей m_λ представлений $\overset{\lambda}{T}$ в тензорном произведении $\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T}$ — проблема «ряда Клебша—Гордана». Это одна из наиболее трудных задач в теории представлений групп, решение которой известно только для нескольких групп и определенных типов представлений. Даже для таких важных групп, которые подобны группе Лоренца, эта задача еще полностью не решена.

Пусть C — оператор в $\overset{1}{E} \otimes \overset{2}{E}$, который приводит внутреннее тензорное произведение $\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T}$ к блочно-диагональному виду, т. е.

$$C(\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T}) C^{-1} = \bigoplus m_\lambda \overset{\lambda}{T}, \quad C(\overset{1}{E} \otimes \overset{2}{E}) = \bigoplus m_\lambda \overset{\lambda}{E}. \quad (13)$$

Матричные элементы оператора C называются «коэффициентами Клебша—Гордана». Они позволяют выразить базисные элементы e_i пространства $\overset{\lambda}{E}$ неприводимого представления $\overset{\lambda}{T}$ через тензорный базис $e_i \otimes e_k$. Коэффициенты Клебша—Гордана играют для групп физических симметрий (таких как группа Лоренца или группа Пуанкаре) существенную роль в физике частиц.

§ 6. Разложение унитарных представлений в прямой интеграл

Пусть $g \rightarrow T_g$ — унитарное представление группы физической симметрии в гильбертовом пространстве H . В приложениях в большинстве случаев представление T приводимо. Однако только неприводимые компоненты $T(\lambda)$ представления T имеют более прямое физическое значение. Поэтому очень важно иметь формализм, который дает описание представления T в терминах его неприводимых компонент.

В общем разложение заданного приводимого унитарного представления в прямую сумму неприводимых представлений невозможно, и следует использовать понятие прямого интеграла пред-

ствлений и прямого интеграла соответствующих пространств представлений. Мы иллюстрируем это на простом примере.

Пусть G — группа трансляций вещественной прямой R , и пусть $g \rightarrow T_g$ — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $H = L^2(R)$, заданное формулой

$$T_g u(x) = u(x + g). \quad (1)$$

В силу леммы Шура каждое неприводимое представление группы G одномерно (см. утверждение 6.1). Поэтому представление (1) приводимо. Предположим, что H_1 — одномерное инвариантное подпространство в H . Тогда для каждого $u_1 \in H_1$ имеем

$$T_g u_1(x) = u_1(x + g) = \lambda_1(g) u_1(x).$$

Поэтому $u_1(x)$ должна быть экспоненциальной функцией. Но $u_1 = 0$ является единственной экспоненциальной функцией в $L^2(R^1)$. Следовательно, $H_1 = \{0\}$. Итак, H не содержит одномерных инвариантных подпространств. Однако если мы перейдем к прямому интегралу гильбертовых пространств, то найдем одномерные пространства, в которых реализуются неприводимые представления группы G . В самом деле, пусть $A = id/dx$ — самосопряженный оператор в H . Используя спектральную теорему, мы видим, что A индуцирует разложение пространства H в прямой интеграл (см. приложение Б.3)

$$H \leftrightarrow \hat{H} = \int_{\Lambda} H(\lambda) d\mu(\lambda), \quad (2)$$

где Λ — спектр оператора A , $H(\lambda)$ — одномерные гильбертовы пространства, а $d\mu(\lambda)$ — спектральная мера, сопоставляемая с A . Каждый элемент u из \hat{H} является вектор-функцией $u = \{u(\lambda), u(\lambda) \in H(\lambda)\}$. В рассмотренном случае связь между элементами $u(\lambda) \in H(\lambda)$ и $u(x) \in H$ задается обычным преобразованием Фурье

$$u(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x) u(x) dx.$$

Мы получаем закон преобразования элементов $u(\lambda)$ из $H(\lambda)$, взяв преобразование Фурье от $T_g u(x)$:

$$(T_g u)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x) (T_g u)(x) dx = \exp(-i\lambda g) u(\lambda).$$

Поэтому каждое гильбертово пространство $H(\lambda)$ в прямом интеграле (2) является инвариантным пространством для $T_g(\lambda)$.

Итак, разложение (2) пространства H , индуцированное оператором A , влечет разложение

$$T_g \leftrightarrow \widehat{T}_g = \int T_g(\lambda) d\mu(\lambda) \quad (3)$$

представления T в прямой интеграл неприводимых представлений. Заметим, что оператор A (или более точно, его спектральные проекторы $E(\lambda)$) лежит в коммутанте T' представления T . Итак, разложения (2) и (3) могут рассматриваться как разложение в прямой интеграл, которое осуществляется абелевой «*»-алгеброй T' .

Теперь мы даем общее определение *прямого интеграла представлений*. Пусть (Λ, μ) — борелево пространство с мерой μ , и пусть

$$\widehat{H} = \int_{\Lambda} H(\lambda) d\mu(\lambda)$$

— прямой интеграл гильбертовых пространств (см. приложение Б, § 3). Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ определен оператор $T(\lambda)$ на $H(\lambda)$. Мы говорим, что операторное поле $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ *интегрируемо* тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $\{T(\lambda)\}$ равномерно ограничено, т. е. существует число M , такое, что

$$\|T(\lambda)\|_{H(\lambda)} \leq M \quad \text{для любого } \lambda \in \Lambda.$$

2. Для любых $u, v \in H$ комплекснозначная функция $\lambda \rightarrow (T(\lambda)u(\lambda), v(\lambda))_{\lambda}$ μ -измерима.

Теперь мы можем определить оператор T на \widehat{H} , положив

$$Tu \equiv \int_{\Lambda} T(\lambda)u(\lambda) d\mu(\lambda), \quad \text{где } u = \int_{\Lambda} u(\lambda) d\mu(\lambda). \quad (4)$$

Условия 1 и 2 гарантируют, что T — ограниченный оператор на \widehat{H} , т. е. $Tu \in \widehat{H}$ для $u \in \widehat{H}$ и $\|T\|_{\widehat{H}} \leq M$.

Пусть G — группа, а Λ — борелево пространство с мерой μ . Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задано унитарное представление $T(\lambda)$ группы G в $H(\lambda)$. Мы говорим, что поле представлений $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ *интегрируемо*, тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ интегрируемо операторное поле $\lambda \rightarrow T_g(\lambda)$. Так как $\|T_g(\lambda)\| = 1$, то поле представлений $T_g(\lambda)$ интегрируемо тогда и только тогда, когда функция $(T_g(\lambda)u(\lambda), v(\lambda))_{\lambda}$ μ -интегрируема.

Для любого интегрируемого поля представлений мы можем определить оператор

$$T_g = \int_{\Lambda} T_g(\lambda) d\mu(\lambda) \quad (5)$$

в \hat{H} . Из определения видно, что

- 1° $T_e = I$,
- 2° $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$,
- 3° $T_g^* = T_g^{-1}$.

Поэтому отображение $g \rightarrow T_g$ задает унитарное представление группы G в H .

Значение понятия прямого интеграла представлений следует из следующей теоремы.

Теорема 0. Каждое унитарное представление T сепарабельной локально компактной группы G является прямым интегралом неприводимых представлений

$$T = \int_{\Lambda} T(\lambda) d\mu(\lambda), \quad (6)$$

где (Λ, μ) — некоторое пространство с мерой и $T(\lambda)$ неприводимы.

Если G имеет тип I, то разложение в (6) по существу единственно.

(Доказательство см. в [554], гл. 1, § 4.)

Теперь мы разработаем общий формализм разложения унитарного представления $g \rightarrow T_g$ группы G на неприводимые компоненты. Этот формализм базируется на теореме фон Неймана о диагональных и разложимых операторах (см. приложение Б.3).

Основные шаги разложения приводимого унитарного представления T_g на неприводимые компоненты следующие:

1. Рассматриваем $\langle *\rangle$ -алгебру T операторов, порожденных представлением T_g :

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i T_{x_i} : c_i \in C \right\}.$$

2. Находим абелеву $\langle *\rangle$ -подалгебру \mathcal{A} в коммутанте T' алгебры T .

3. Применяем теорему фон Неймана и получаем разложение пространства H в прямой интеграл гильбертовых пространств

$$H \leftrightarrow \hat{H} = \int H(\lambda) d\mu(\lambda), \quad (7)$$

которое осуществляется алгеброй \mathcal{A} .

Поскольку T_g лежит в \mathcal{A}' , то T_g — разложимый оператор. Поэтому

$$T_g \leftrightarrow \widehat{T}_g = \int T_g(\lambda) d\mu(\lambda). \quad (8)$$

Ясно, что если \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — две абелевы «*»-алгебры в T' и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, то разложение $\int_{\Lambda_2} T(\lambda_2) d\mu^2(\lambda_2)$, которое осуществляется алгеброй \mathcal{A}_2 , является усилением разложения $\int_{\Lambda_1} T(\lambda_1) d\mu^1(\lambda_1)$, которое осуществляется алгеброй \mathcal{A}_1 . Можно ожидать наиболее эффективного разложения в случае, когда \mathcal{A} — абелева максимальная «*»-алгебра в T' . Это составляет содержание следующей существенной теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (Маутнер). *Пусть G — сепарабельная локально компактная группа. Пусть $g \rightarrow T_g$ — непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H . Пусть \mathcal{A} — абелева «*»-алгебра в коммутанте T' для T . Тогда*

1) существует разложение H и T в прямой интеграл, заданное формулами (4) и (5) соответственно,

2) $T(\lambda)$ почти всюду неприводимо относительно μ в $H(\lambda)$ тогда и только тогда, когда \mathcal{A} максимальна в T' .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Разложения (7) и (8) для H и T в прямой интеграл (5) являются прямым следствием теоремы фон Неймана (см. приложение Б.3). Теперь покажем, что максимальность \mathcal{A} предполагает по существу неприводимость $T(\lambda)$.

Пусть $\Lambda_0 \subset \Lambda$ — множество с положительной мерой $\mu(\Lambda_0) > 0$. Для каждого $\lambda_0 \in \Lambda_0$ пусть $B(\lambda_0) \neq I(\lambda_0)$ — ограниченный оператор в $H(\lambda_0)$, который коммутирует с каждым $T_g(\lambda_0)$, $g \in G$. Для $\lambda \in \Lambda - \Lambda_0$ положим $B(\lambda) = 0$. Можно показать, что существует измеримое операторное поле $B(\lambda)$. Положим $B \equiv \int_{\Lambda_0} B(\lambda) d\mu(\lambda)$. Поскольку B не диагонален в $H = \int_{\Lambda} \widehat{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$, то $B \notin \mathcal{A}$; но так как B разложимый оператор, то $B \in \mathcal{A}'$. Итак, алгебра $\mathcal{A} \cup B$ является коммутативной подалгеброй в T' и $\mathcal{A} \cup B$ содержит \mathcal{A} , не совпадая с ней. Поэтому \mathcal{A} не максимальна в T' . Следовательно, максимальность \mathcal{A} предполагает неприводимость представлений $T(\lambda)$ для почти всех λ относительно μ .

Чтобы показать обратное, положим, что

$$T = \int_{\Lambda} T(\lambda) d\mu(\lambda),$$

где для почти всех λ относительно μ представления $T(\lambda)$ неприводимы в $\widehat{H}(\lambda)$. Если коммутативная алгебра \mathcal{A} не максимальна,

то существует ортогональный нетривиальный проектор $E \in (T' - \mathcal{A})$, коммутирующий с \mathcal{A} . Следовательно,

$$E = \int_{\Lambda_0} E(\lambda) d\mu(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ — ненулевой проектор в $H(\lambda)$ для λ из некоторого множества Λ_0 с $\mu(\Lambda_0) > 0$. Так как $E \in T'$, то теперь мы имеем

$$E(\lambda)T(\lambda) = T(\lambda)E(\lambda).$$

Поскольку для почти всех λ относительно μ $T(\lambda)$ неприводимы, то $E(\lambda) = I$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, \mathcal{A} должна быть максимальной.

(Полное доказательство см. в [554].)

Теорема Маутнера играет важную роль в теории представлений групп и в ее приложениях.

Следующая существенная теорема, которая является прямым следствием теоремы Маутнера, показывает, что топологическая группа всегда имеет нетривиальные неприводимые представления.

ТЕОРЕМА 2 (Теорема Гельфанд—Райкова). *Пусть G — сепарабельная топологическая группа. Тогда для каждого двух элементов $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, существует неприводимое представление $g \rightarrow T_g$ группы G , такое, что $T_{g_1} \neq T_{g_2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T^L — левое регулярное представление группы G в $L^2(G)$. Поскольку T^L является точным, то $T_{g_1}^L \neq T_{g_2}^L$. Пусть

$$T_g^L = \int_{\Lambda} T_g(\lambda) d\mu(\lambda)$$

— разложение в прямой интеграл представления T^L . Если $T_{g_1}^L(\lambda) = T_{g_2}^L(\lambda)$ для почти всех λ относительно μ , $\lambda \in \Lambda$, то $T_{g_1}^L$ равнялось бы $T_{g_2}^L$, что приводит к противоречию.

Теорема Гельфанд—Райкова была доказана (с помощью положительно определенных функций) в начале развития теории представлений групп в 1943 г. Она представляет собой один из наиболее важных результатов в теории представлений. В случае абелевых групп теорема 2 дает:

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть G — абелева сепарабельная топологическая группа. Для каждого $g_1 \neq g_2$ существует характер $\chi(g)$, такой, что $\chi(g_1) \neq \chi(g_2)$.*

Следует подчеркнуть, что выбор максимальной коммутативной алгебры \mathcal{A} в T' не единствен. Явный пример выбора различных унитарно неэквивалентных множеств коммутирующих операторов в T' дается в (9.6.11).

Многим физикам кажется, что множество инвариантных операторов группы G (и, следовательно, также для T') коммутативно. Приведем контрпример.

ПРИМЕР 1. Пусть K — замкнутая подгруппа группы Ли G , такая, что $X = G/K = \{gK, g \in G\}$ обладает инвариантной мерой μ . Пусть $N(K)$ — нормализатор подгруппы K в G , т. е. множество всех $n \in G$, таких, что $nKn^{-1} \subset K$. Пусть $H = L^2(X, \mu)$, и пусть $g \rightarrow T_g$ — унитарное представление группы G в H , заданное формулой

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x). \quad (9)$$

Пусть $T_n^R, n \in N(K)$, — оператор в H , заданный формулой

$$T_n^R u(gK) = u(gKn) = u(gnK).$$

Тогда:

$$(T_n^R T_{g_0}) u(gK) = (T_{g_0}) u(gKn) = u(g_0^{-1}gnK) = (T_{g_0} T_n^R u)(gK). \quad (10)$$

Правые сдвиги на элементы $n \in N(K)$ хорошо определены в X и коммутируют со всеми $T_{g_0}, g_0 \in G$. Итак, каждый правый сдвиг $T_n^R, n \in N(K)$, лежит в коммутанте T' . Следовательно, если $N(K)/K$ — некоммутативная подгруппа, то T неабелева.

Можно ожидать, что разложение (8) наиболее простое в том случае, когда T' абелев. Представления с этим свойством называются *свободными от кратностей*. В таком случае мы можем взять $\mathcal{A} = T'$ и получить по существу единственное разложение представления T на неприводимые компоненты. Следующая теорема показывает, что для групп типа I мы имеем по существу единственное разложение представления T на неприводимые компоненты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — сепарабельная топологическая группа типа I. Пусть $g \rightarrow T_g$ — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H , и пусть \widehat{G} — множество классов эквивалентных неприводимых представлений. Тогда существуют стандартная борелева мера $\widehat{\mu}$ на \widehat{G} и функция $\widehat{n}(\lambda)$ на \widehat{G} , такие, что

$$H \leftrightarrow H = \int_{\widehat{G}} H(\lambda) \widehat{n}(\lambda) d\widehat{\mu}(\lambda),$$

$$T \leftrightarrow \widehat{T} = \int_{\widehat{G}} T(\lambda) \widehat{n}(\lambda) d\widehat{\mu}(\lambda).$$

(Доказательство см. в [574], гл. V, § 2.)