§ 7. Комментарии и дополнения

А. *Некоторые обобщения непрерывных унитарных представлений*

До сих пор мы рассматривали свойства унитарных непрерывных линейных представлений топологической группы G. Можно спросить о существовании теории, в которой некоторые из этих условий, наложенных на представителей T_x группы G, ослаблены. Во-первых, можно построить гомоморфизмы из G в $L(H)$, для которых $T_e \neq I$. В самом деле, если, например, $G = R^1$, то отображение

$$R^1 \ni x \to T_x = \begin{bmatrix} \exp(ix) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где 0 — нулевой оператор в подпространстве пространства H, удовлетворяет условию $T_{xy} = T_x T_y$ в любом гильбертовом пространстве, но $T_e \neq I$. Следующее утверждение показывает, что мы практически ничего не теряем, налагая условие $T_e = I$.

Утверждение 1. *Пусть $x \to T_x$ — гомоморфизм из G в $L(H)$. Тогда H является прямой суммой $H_1 \oplus H_0$ инвариантных подпространств и T имеет вид*

$$T_x = \begin{bmatrix} \overset{1}{T}_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\overset{1}{T}$ — представление группы G в H_1.

Доказательство. Положим $H_1 = \{u \in H: T_e u = u\}$ и $H_0 = \{u \in H: T_e u = 0\}$. Ясно, что $H_1 \cap H_0 = \{0\}$. Для произвольного u из H мы имеем, что $u = T_e u + (u - T_e u)$, где $T_e(T_e u) = T_e u$ и $T_e(u - T_e u) = 0$. Поэтому H — прямая сумма $H_1 \oplus H_0$. Очевидно, что H_1 и H_0 — замкнутые инвариантные подпространства в H. Для u из H_0 $T_x u = T_x T_e u = 0$. Итак, $T_x H_0 = \{0\}$ и отображение $x \to T_x$ принимает вид (1).

Во-вторых, мы можем отбросить условие непрерывности. Чтобы увидеть, что в этом случае происходит, мы вводим понятие так называемого *измеримого представления*. Пусть μ — мера Хаара на G, и пусть T — унитарное представление группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Говорят, что T μ-измеримо, если функция $x \to (T_x u, v)$ μ-измерима для всех u, v из H. Имеет место

Утверждение 2. *Унитарное представление T непрерывно тогда и только тогда, когда оно μ-измеримо.*

(Доказательство см. в [405], (22.20в).)

Этот результат показывает,что разрывные представления должны быть неизмеримы. Поскольку для неизмеримых функций мы имеем только теоремы существования, то мы не надеемся на явные конструктивные реализации разрывных представлений (см. пример 1.3). Поэтому их физическое значение сомнительно [1]). Однако можно было бы получить измеримые разрывные представления, если допустить несепарабельные гильбертовы пространства, например неймановские бесконечные тензорные произведения гильбертовых пространств $\prod_i \otimes H_i$.

Интересную характеристику унитарных представлений в несепарабельных гильбертовых пространствах дает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть T — унитарное μ-измеримое представление локально компактной группы G в несепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть H_s — подпространство всех векторов u из H, таких, что для всех φ из $L^1(G)$ и всех v из H имеем*

$$\int \varphi(x)(T_x u, v)\, d\mu(x) = 0.$$

Тогда

1° *H — прямая сумма двух инвариантных подпространств: $H = H_c \oplus H_s$.*

2° *Представление ${}^{H_c}T$ непрерывно. Представление ${}^{H_s}T$ сингулярно в том смысле, что отображение $x \to (T_x u, u)$ эквивалентно* [2]) *нулю для всех u из H_s.*

3° *Если H сепарабельно, то подпространство H_s отсутствует.*

(Доказательство см. в [753].)

Б. *Комментарии*

1. В математике эквивалентные представления T и T' группы G неразличимы. Однако в физике унитарно эквивалентные представления не обязательно физически эквивалентны. В самом деле, пусть H — гамильтониан системы двух взаимодействующих нерелятивистских частиц или частицы в потенциальном поле. Предположим, что для такого взаимодействия H имеет только непрерывный спектр (т. е. отсутствуют связанные состояния). Тогда существует унитарный оператор рассеяния S, такой, что

$$SH_0 = HS,$$

где H_0 — свободный гамильтониан. Поэтому операторы временного сдвига $U_t = \exp(itH)$ и $U_t^0 = \exp(itH_0)$ унитарно эквивалентны.

---

[1]) Мы получим разрывное трехмерное представление группы вращений SO (3), если заменим в матричных элементах функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ на $\cos f(\varphi)$, $\sin f(\varphi)$, где $f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$ и $f(\varphi)$ разрывна.

[2]) Функция $f(x)$ на G [в нашем случае $f(x) = (T_x u, u)$] *эквивалентна* нулю, если для почти всех $x \in G$ относительно μ $f(x) = 0$.

Однако они не эквивалентны физически, так как описывают временную эволюцию существенно различных физических систем. Такое же заключение имеет место при рассмотрении эквивалентных представлений группы Галилея или группы Пуанкаре. Причина этого различия кроется в том факте, что в физике мы используем не абстрактные группы, а группы, генераторы которых отождествляются с физическими наблюдаемыми. Одна и так же группа может быть использована для описания различных физических ситуаций.

2. В § 3 мы описали фактор-представления типа I. Другие типы фактор-представлений могут быть описаны с помощью понятия *конечных представлений*.

Если $\infty T \simeq T$, то мы говорим, что T *бесконечно*. Если ни одно подпредставление представления T не является бесконечным, то мы говорим, что T *конечно*. О фактор-представлении T, которое имеет конечные подпредставления, но не имеет неприводимых подпредставлений, говорят, что оно является типа II.

Наконец, если T приводимо, но каждое собственное подпредставление в T эквивалентно T, то говорят, что T является *фактор-представлением* типа III. Такое T обязательно является фактор-представлением и бесконечно.

Общее представление T группы G не обязано принадлежать к одному из описанных выше трех типов. Однако имеет место

Теорема 1. *Пусть T — любое унитарное представление группы G. Тогда существуют однозначно определенные проекторы P_1, P_2 и P_3 в центре алгебры $R(T, T)$, такие, что*

1) $P_1 + P_2 + P_3 = I$,

2) ${}^{P_1}H T$, ${}^{P_2}H T$ *и* ${}^{P_3}H T$ типа I, II *и* III *соответственно*,

3) *при $i \neq j$ никакое подпредставление представления ${}^{P_i}H T$ не эквивалентно подпредставлению представления ${}^{P_j}H T$.*

Эта теорема показывает, что мы можем ограничиться анализом фактор-представлений типов I, II и III.

Почти во всех приложениях мы встречаемся только с представлениями типа I. Свойства фактор-представлений типов II и III менее интуитивны. Относительно простое построение фактор-представлений типа II дано в книге Наймарка [622], § 38. Недавно также были построены фактор-представления типа III (см [224]).

Интересно, что в релятивистской квантовой теории поля мы, вероятно, не можем избежать использования факторов типа III. Действительно, Араки и Вудс недавно показали, что представление канонических коммутационных соотношений скалярного релятивистского квантового поля приводит к факторам типа III.

Хорошее описание теории факторов и их приложений к теории представлений групп представлено в книге Диксмье [224].

§ 8. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что матричные элементы неприводимых представлений группы SO (3) имеют вид

$$D^J_{MM'}(\varphi, \theta, \psi) = \exp(-iM\varphi)\, d^J_{MM'}(\theta) \exp(-iM'\psi), \tag{1}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, M$, $M' = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$ и

$$d^J_{MM'}(\theta) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^M P^{0,\,2M}_{J-M}(\cos\theta). \tag{2}$$

Здесь $P^{\alpha,\beta}_{\nu}(x)$ — полином Якоби.

§ 5.1. Покажите, что «ряд Клебша—Гордана» для SO (3) имеет следующий вид:

$$T^{J_1} \otimes T^{J_2} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} T^J. \tag{3}$$