

Хорошее описание теории факторов и их приложений к теории представлений групп представлено в книге Диксмье [224].

§ 8. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что матричные элементы неприводимых представлений группы $\text{SO}(3)$ имеют вид

$$D_{MM'}^J(\varphi, \theta, \psi) = \exp(-iM\varphi) d_{MM'}^J(\theta) \exp(-iM'\psi), \quad (1)$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, M$, $M' = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ и

$$d_{MM'}^J(\theta) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^M P_{J-M}^{0, 2M}(\cos \theta). \quad (2)$$

Здесь $P_{\gamma}^{\alpha, \beta}(x)$ — полином Якоби.

§ 5.1. Покажите, что «ряд Клебша—Гордана» для $\text{SO}(3)$ имеет следующий вид:

$$T^{J_1} \otimes T^{J_2} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} T^J. \quad (3)$$