Чтобы использовать симметрию между G и $\widehat{G}$, мы вводим более симметрическое обозначение для характеров, положив $\widehat{x}(x) = \langle x, \widehat{x}\rangle$. Тогда формулы (3)—(6) принимают вид

$$|\langle x, \widehat{x}\rangle| = 1, \tag{3'}$$

$$\langle x_1 x_2, \widehat{x}\rangle = \langle x_1, \widehat{x}\rangle \langle x_2, \widehat{x}\rangle, \tag{4'}$$

$$\langle x, \widehat{x}_1 \widehat{x}_2\rangle = \langle x, \widehat{x}_1\rangle \langle x, \widehat{x}_2\rangle. \tag{6'}$$

Комплексный характер абелевой локально компактной группы G — это представление группы G в C.

§ 2. Теоремы Стоуна и СНАГ

Теперь мы выведем существенную теорему о разложении произвольного унитарного представления абелевой группы.

Теорема 1 (Теорема Стоуна, Наймарка, Амброуза, Годемана). *Пусть T — унитарное непрерывное представление абелевой локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H. Тогда на группе характеров $\widehat{G}$ существует спектральная мера $E(\cdot)$, такая, что* [1])

$$T_x = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x}\rangle \, dE(\widehat{x}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $u \in H$. Тогда функция $x \to (T_x u, u)$ положительно определена. Поэтому, согласно теореме Бохнера, существует конечная регулярная борелева мера $\mu_{u,u}$ на $\widehat{G}$, такая, что

$$(T_x u, u) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x}\rangle \, d\mu_{u,u}(\widehat{x}),$$

и, в частности,

$$\int_{\widehat{G}} d\mu_{u,u} = \mu_{u,u}(\widehat{G}) = (u, u).$$

Используя полярное разложение, $(T_x u, v)$ может быть записано как линейная комбинация выражений вида $(T_x u', u')$. Поэтому существует единственная комплексная мера $\mu_{u,v}$, такая, что

$$(T_x u, v) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x}\rangle \, d\mu_{u,v}(\widehat{x}).$$

---

[1]) Свойства спектральной меры dE и спектральную теорию фон Неймана см. в приложении Б.3.

Теперь фиксируем любое борелево множество $\widehat{B} \subset \widehat{G}$. Тогда $\mu_{u,v}(\widehat{B})$ является билинейным функционалом $F_{\widehat{B}}(u, v)$ на H, который эрмитов, так как

$$F_{\widehat{B}}(u, v) = \mu_{u,v}(\widehat{B}) = \mu_{v,u}(\widehat{B}) = F_{\widehat{B}}(v, u),$$

и ограничен, так как

$$\left| F_{\widehat{B}}(u, v) \right|^2 \leqslant \mu_{u,u}(\widehat{B})\, \mu_{v,v}(\widehat{B}) \leqslant \| u \|^2 \| v \|^2, \tag{2}$$

В самом деле, для любого вещественного λ положим

$$u' \equiv u + \lambda \mu_{v,u}(\widehat{B})\, v.$$

Тогда

$$0 \leqslant \mu_{u',u'}(\widehat{B}) = \mu_{u,u}(\widehat{B}) + 2\lambda \left| \mu_{u,v}(\widehat{B}) \right|^2 + \lambda^2 \left| \mu_{u,v}(\widehat{B}) \right|^2 \mu_{v,v}(\widehat{B}),$$

что предполагает

$$\left| \mu_{u,v}(\widehat{B}) \right|^4 - \mu_{u,u}(\widehat{B})\, \mu_{v,v}(\widehat{B}) \left| \mu_{u,v}(\widehat{B}) \right|^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует (2).

Поэтому, согласно теореме Рисса, для каждого борелева множества $\widehat{B} \subset \widehat{G}$ существует оператор $E(\widehat{B})$ на H, такой, что для любых $u, v \in H$ имеем

$$(E(\widehat{B})\, u, v) = F_{\widehat{B}}(u, v) = \mu_{u,v}(\widehat{B}). \tag{3}$$

Очевидно, что $[E(\widehat{B})]^* = E(\widehat{B})$; более того, простое вычисление показывает, что

$$(E(\widehat{B})\, T_x u, v) = \int_{\widehat{B}} \langle x, \widehat{x} \rangle (E(\mathrm{d}\widehat{x})\, u, v).$$

Следовательно, если для каждого борелева множества $\widehat{B}_1$ положим $Q(\widehat{B}_1) \equiv E(\widehat{B} \cap \widehat{B}_1)$, то имеем

$$\int_{\widehat{B}} \langle x, \widehat{x} \rangle (E(\mathrm{d}\widehat{x})\, u, v) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x} \rangle (Q(\mathrm{d}\widehat{x})\, u, v) = (E(\widehat{B})\, T_x u, v) =$$

$$= \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x} \rangle (E(\widehat{B})\, E(\mathrm{d}\widehat{x})\, u, v).$$

Отсюда легко заключаем, что

$$E(\widehat{B} \cap \widehat{B}_1) = E(\widehat{B})\, E(\widehat{B}_1).$$

Легко проверить, что операторная функция $\widehat{B} \to E(\widehat{B})$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на спектральную меру (см. § 3 в приложении Б). Поэтому, согласно (3), мы имеем

$$(T_x u, v) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x} \rangle \, d\mu_{u,v}(\widehat{x}) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \widehat{x} \rangle (E(d\widehat{x}) u, v).$$

Из этого равенства следует справедливость теоремы 1.

В специальном, но очень важном случае абелевых векторных групп мы получаем следующую теорему.

Теорема 2 (теорема Стоуна). *Рассмотрим $G = R^n$ как аддитивную векторную группу, и пусть T — унитарное непрерывное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственное множество попарно сильно коммутирующих самосопряженных операторов $Y_1, \ldots, Y_n$, таких, что*

$$T_x = \prod_{k=1}^{n} \exp(ix_k Y_k). \tag{4}$$

Доказательство. В силу примера 1.1° группа характеров $\widehat{G}$ совпадает с R^n и $\langle x, \widehat{x} \rangle = \exp[i(x_1\widehat{x}_1 + \ldots + x_n\widehat{x}_n)]$. Поэтому согласно (1) имеем

$$T_x = \int_{R^n} \exp[i(x_1\widehat{x}_1 + \cdots + x_n\widehat{x}_n)] \, dE(\widehat{x}). \tag{5}$$

Теперь, используя теоремы 4.1 (пункт 3) и 4.2 из приложения Б, получаем

$$T_x = \prod_{k=1}^{n} \int_{R^n} \exp[ix_k\widehat{x}_k] \, dE(\widehat{x}) = \prod \int_{R^1} \exp[ix_k\widehat{x}_k] \, dE(\widehat{x}_k) =$$

$$= \prod \exp[ix_k Y_k], \tag{6}$$

где

$$dE(\widehat{x}_k) = \int_{R^{n-1}} dE(\widehat{x}), \quad Y_k = \int \widehat{x}_k \, dE(\widehat{x}_k). \tag{7}$$

Пример 1. Пусть $G = T^{3,1}$ — группа трансляций пространства Минковского M^4, и пусть $x \to T_x$ — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Дуальное пространство $\widehat{G}$ отождествляется в физике с импульсным пространством P,

которое изоморфно M^4. Поэтому формула (4) может быть записана в виде

$$T_x = \int_P \exp(ixp)\,dE(p), \quad xp = x^\mu p_\mu, \tag{8}$$

где $E(\cdot)$ — спектральная мера на импульсном пространстве. Коммутирующее множество самосопряженных операторов, определенное формулой (7), в этом случае совпадает с

$$P_\mu = \int_P p_\mu\,dE(p), \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{9}$$

и представляет собой четыре-вектор энергии-импульса.

§ 3. Комментарии и дополнения

А. *Теорема дуальности Понтрягина*

Опишем здесь важное свойство представлений абелевых локально компактных групп.

Заметим сначала, что отображение $\hat{G} \ni \hat{x} \to \langle x, \hat{x}\rangle$ определяет непрерывную функцию на $\hat{G}$, которая удовлетворяет соотношениям (1.3′) и (1.6′). Поэтому каждый элемент $x \in G$ определяет характер $\hat{\hat{x}}$ группы $\hat{G}$. Следовательно, $G \subset \hat{\hat{G}}$, где $\hat{\hat{G}}$ — множество всех $\hat{\hat{x}}$. Следующая теорема утверждает, что не существует других характеров на $\hat{G}$, кроме тех, которые определяются элементами из G.

Теорема 1. *Отображение $G \ni x \to \hat{\hat{x}} \in \hat{\hat{G}}$ является топологическим изоморфизмом*

$$G \cong \hat{\hat{G}}.$$

(Доказательство см. в [405], § 24.)

Пример 1 дает две простейшие иллюстрации дуальности Понтрягина.

Б. *Комментарии*

Теорема СНАГ обычно формулируется в операторном виде, заданном формулой (2.1). Следующая интересная форма этой теоремы, основанная на теореме Бохнера, была недавно дана Хьюиттом и Россом.

Теорема 2. *Пусть T — непрерывное циклическое унитарное представление абелевой локально компактной группы G. Существу-*