

которое изоморфно  $M^4$ . Поэтому формула (4) может быть записана в виде

$$T_x = \int_P \exp(ixp) dE(p), \quad xp = x^\mu p_\mu, \quad (8)$$

где  $E(\cdot)$  — спектральная мера на импульсном пространстве. Коммутирующее множество самосопряженных операторов, определенное формулой (7), в этом случае совпадает с

$$P_\mu = \int_P p_\mu dE(p), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

и представляет собой четырехвектор энергии-импульса.

### § 3. Комментарии и дополнения

#### A. Теорема дуальности Понtryгина

Опишем здесь важное свойство представлений абелевых локально компактных групп.

Заметим сначала, что отображение  $\widehat{G} \ni \widehat{x} \rightarrow \langle x, \widehat{x} \rangle$  определяет непрерывную функцию на  $\widehat{G}$ , которая удовлетворяет соотношениям (1.3') и (1.6'). Поэтому каждый элемент  $x \in G$  определяет характер  $\widehat{x}$  группы  $\widehat{G}$ . Следовательно,  $G \subset \widehat{\widehat{G}}$ , где  $\widehat{\widehat{G}}$  — множество всех  $\widehat{x}$ . Следующая теорема утверждает, что не существует других характеров на  $\widehat{G}$ , кроме тех, которые определяются элементами из  $G$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Отображение  $G \ni x \rightarrow \widehat{x} \in \widehat{\widehat{G}}$  является топологическим изоморфизмом*

$$G \cong \widehat{\widehat{G}}.$$

(Доказательство см. в [405], § 24.)

Пример 1 дает две простейшие иллюстрации дуальности Понtryгина.

#### B. Комментарии

Теорема СНАГ обычно формулируется в операторном виде, заданном формулой (2.1). Следующая интересная форма этой теоремы, основанная на теореме Бахнера, была недавно дана Хьюиттом и Россом.

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть  $T$  — непрерывное циклическое унитарное представление абелевой локально компактной группы  $G$ . Существу-*

ет положительная мера  $v(\cdot)$  на  $G$ , такая, что  $T$  унитарно эквивалентно следующему представлению:

$$U_x v(\hat{x}) = \hat{x}(x) v(\hat{x}) = \hat{x}(\hat{x}) v(\hat{x}), \quad x \in G, \quad v \in L^2(\hat{G}, \nu). \quad (1)$$

(Доказательство см. в [406], § 33.8.)

Теорема СНАГ была первоначально доказана Стоуном для  $G = R^n$  [786, 787]. Позже Наймарк в 1943 г., Амброуз в 1944 г. и Годеман в 1944 г. дали различные обобщения этой теоремы для произвольных абелевых локально компактных групп. Мы следуем здесь изложению, данному Мореном [574], гл. VI.

В. Гармонический анализ на локально компактных коммутативных группах рассматривается в гл. 14, § 1.

### Г. Неразложимые представления

Дадим построение неразложимых представлений векторных групп, которые наиболее важны в приложениях. Пусть  $G = R^n$ . Формула

$$R^n \ni x \rightarrow T_x = \exp(ipx) \begin{bmatrix} 1 & \gamma(px) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $px = p_k x^k$  — скалярное произведение в  $R^n$  и  $\gamma \in C$ , дает простейший пример неразложимого представления. Используя индуктивный метод, можно найти, что  $n$ -мерное неразложимое представление группы  $R^n$  может быть взято в виде

$$R^n \ni x \rightarrow T_x = \exp(ipx) \times \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{n-1}(px) & \gamma_{n-2}\gamma_{n-1}(px)^2/2 & \cdots & \frac{\gamma_2 \cdots \gamma_{n-1}}{(n-2)!} (px)^{n-2} & \frac{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}}{(n-1)!} (px)^{n-1} \\ 1 & \gamma_{n-2}(px) & \frac{\gamma_2 \cdots \gamma_{n-2}}{(n-3)!} (px)^{n-3} & \cdots & \frac{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-2}}{(n-2)!} (px)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \gamma_2(px) & \frac{\gamma_1\gamma_2}{2} (px)^2 & & & \\ 0 & 1 & \gamma_1(px) & & & \\ & & 1 & & & \end{vmatrix}.$$

Эти представления неунитарны. Они используются для теоретико-группового описания нестабильных частиц (см. гл. 17, § 4).

Неразложимые представления других коммутативных групп могут быть построены подобным образом с помощью треугольных матриц. Например, неразложимое представление мультиплика-

тивной группы комплексных чисел может быть взято в виде

$$C \ni z \rightarrow T_z = \begin{bmatrix} 1 & \ln z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### § 4. Упражнения

§ 1.1. Пусть  $D_n = \{\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_k \in C\}$  — мультипликативная группа комплексных чисел. Покажите, что отображение

$$\delta \rightarrow \chi_\delta = \prod_{s=1}^n |\delta_{ss}|^{m_s + i\rho_s} \delta_{ss}^{-m_s}, \quad (1)$$

где  $m_s$  — целые числа, а  $\rho_s$  — вещественные числа, является характером группы  $D_n$ .

§ 1.2. Положите  $\rho_s \in C$  в формуле (1). Покажите, что в этом случае отображение (1) дает комплексный характер группы  $D_n$ .

§ 1.3. Постройте разрывное неприводимое унитарное представление группы  $G = R^1$ .

*Указание.* Используйте базис Гамеля.

§ 1.4. Пусть  $G = N \rtimes K$ , где  $N$  — коммутативна. Пусть  $n \rightarrow U_n$  и  $k \rightarrow V_k$  — представления подгрупп  $N$  и  $K$  соответственно в пространстве  $H$ . Каким условиям должно удовлетворять  $U$ , для того чтобы отображение  $(n, k) \rightarrow U_n V_k$  было представлением группы  $G$ ?

§ 3.1. Классифицируйте все конечномерные неразложимые представления группы  $G = R^1$ .

§ 3.2. Классифицируйте все неразложимые представления группы  $R^1$  в гильбертовом пространстве.

§ 3.3. Классифицируйте все конечномерные неразложимые представления группы  $G = R^n$ .