Глава 7

Представления компактных групп

§ 1. Основные свойства представлений компактных групп

Теория представлений компактных групп образует мост между сравнительно простой теорией представлений конечных групп и теорией представлений некомпактных групп. Большинство теорем для представлений конечных групп имеет прямой аналог для компактных групп, и эти результаты, в свою очередь, служат отправной точкой для теории представлений некомпактных групп.

Всюду в этой главе G будет обозначать компактную топологическую группу, а dx — инвариантную меру на G, нормированную на единицу. Под представлением группы G мы будем понимать сильно непрерывное представление в гильбертовом пространстве H. Напомним, что, согласно (5.1.3), любое представление компактной топологической группы ограничено.

Покажем сначала, что в случае представлений компактных топологических групп мы можем без потери общности ограничиться анализом только унитарных представлений.

Теорема 1. *Пусть T — произвольное представление компактной группы G в H. В H существует новое скалярное произведение, определяющее норму, эквивалентную первоначальной норме, относительно которого отображение $x \to T_x$ определяет унитарное представление группы G.*

Доказательство. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — первоначальное скалярное произведение в H. Определим новое скалярное произведение формулой

$$(u, v)' \equiv \int_G (T_x u, T_x v)\, dx. \tag{1}$$

Легко проверить, что $(\cdot, \cdot)'$ — скалярное произведение в H. В частности,

$$(u, u)' = \int_G (T_x u, T_x u)\, dx = 0 \Rightarrow u = 0.$$

В самом деле, $(T_x u, T_x u)$ равно нулю почти всюду. Если $x \in G$ такой, что $T_x u = 0$, то $T_x^{-1} T_x u = u = 0$.

Тогда для каждого T_y имеем

$$(T_y u,\ T_y v)' = \int_G (T_{xy} u,\ T_{yx} v)\,\mathrm{d}x = \int_G (T_z u,\ T_z v)\,\mathrm{d}z = (u,\ v)'. \qquad (2)$$

Поэтому каждый оператор T_y, $y \in G$, изометричен и $D_{T_y} = H$. Итак, каждый оператор T_y, $y \in G$, унитарен.

Чтобы показать непрерывность представления в топологии, индуцированной скалярным произведением (1), докажем сначала эквивалентность норм. Заметим, что

$$\|u\|'^2 = (u,\ u)' = \int_G (T_x u,\ T_x u)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\sup_{x \in G} \|T_x\|\right)^2 \int_G (u,\ u)\,\mathrm{d}x =$$

$$= N^2 (u,\ u) = N^2 \|u\|^2,$$

где мы положили $N = \sup\limits_{x \in G} \|T_x\|$. Обратно, из неравенства

$$\|u\|^2 = (T_{x^{-1}} T_x u,\ T_{x^{-1}} T_x u) \leqslant \left(\sup_G \|T_x\|\right)^2 (T_x u,\ T_x u) = N^2 \|T_x u\|^2$$

следует

$$\|u\|^2 = \int_G (u,\ u)\,\mathrm{d}x \leqslant N^2 \int (T_x u,\ T_x u)\,\mathrm{d}x = N^2 (u,\ u)' = N^2 \|u\|'^2.$$

Поэтому

$$N^{-1} \|u\| \leqslant \|u\|' \leqslant N \|u\|, \qquad (3)$$

т. е. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ эквивалентны. Эквивалентные нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ определяют эквивалентные сильные топологии τ и τ' соответственно на H. Поэтому отображение $x \to T_x u$ из G в H непрерывно относительно τ', и, следовательно, отображение $x \to T_x$ является унитарным непрерывным представлением группы G в H.

Следующий важный результат для компактных групп показывает, что каждое неприводимое унитарное представление конечномерно. Но сначала докажем следующую полезную лемму.

Лемма 2. *Пусть T — унитарное представление группы G, и пусть u — любой фиксированный вектор в пространстве представления H. Тогда оператор Вейля K_u, определенный для всех $v \in H$ формулой*

$$K_u v = \int_G (v,\ T_x u)\, T_x u\,\mathrm{d}x, \qquad (4)$$

имеет следующие свойства:

1° *K_u ограничен,*

2° *$K_u T_x = T_x K_u$ для каждых $x \in G$ и $u \in H$.*

Доказательство. 1°.

$$\|K_u v\| \leqslant \int_G |(v,\ T_x u)|\,\|T_x u\|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_G \|v\|\,\|T_x u\|\,\|u\|\,\mathrm{d}x = \|u\|^2\|v\|.$$

2°. Для каждых $y \in G$ и $v \in H$ имеем

$$T_y K_u v = \int_G (v,\ T_x u)\, T_{yx} u\,\mathrm{d}x = \int_G (T_y v,\ T_{yx} u)\, T_{yx} u\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_G (T_y v,\ T_x u)\, T_x u\,\mathrm{d}x = K_u T_y v,$$

т. е. $T_y K_u = K_u T_y$.

Перейдем теперь к основной теореме.

Теорема 3. *Каждое неприводимое унитарное представление T группы G конечномерно.*

Доказательство. Согласно лемме 2, мы имеем, что для каждых $y \in G$ и $u \in H$ $K_u T_y = T_y K_u$. Поэтому, согласно утверждению 5.3.4, $K_u = \alpha(u)\, I$ и, следовательно,

$$(K_u v,\ v) = \int_G (v,\ T_x u)\,(T_x u,\ v)\,\mathrm{d}x = \alpha(u)\,(v,\ v).$$

Поэтому

$$\int_G |(T_x u,\ v)|^2\,\mathrm{d}x = \alpha(u)\,\|v\|^2. \tag{5}$$

Переставив в (5) u и v и использовав равенство

$$\int_G f(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x,$$

получаем

$$\alpha(v)\,\|u\|^2 = \int_G |(T_x v,\ u)|^2\,\mathrm{d}x = \int_G |(u,\ T_x v)|^2\,\mathrm{d}x = \int_G |(T_{x^{-1}} u,\ v)|^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_G |(T_x u,\ v)|^2\,\mathrm{d}x = \alpha(u)\,\|v\|^2.$$

Поэтому для всех $u \in H$ $\alpha(u) = c\|u\|^2$, где c — константа. Положив в формуле (5) $v = u$ и $\|u\| = 1$, мы получаем, в частности,

$$\int_G |(T_x u,\ u)|^2\,\mathrm{d}x = \alpha(u)\,\|u\|^2 = c\,\|u\|^4 = c. \tag{6}$$

Поэтому $c > 0$, так как неотрицательная непрерывная функция $x \to |(T_x u,\ u)|$ принимает значение $\|u\| = 1$ при $x = e$. Теперь

докажем существенную часть теоремы. Пусть $\{e_i\}_1^n$ — любое множество ортонормированных векторов в H. Положив в (5) $u = e_k$ и $v = e_1$, получаем

$$\int_G |(T_x e_k, e_1)|^2 \, dx = \alpha(e_k) \|e_1\|^2 = c, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, ортонормальность векторов $T_x e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и неравенство Парсеваля приводят к формуле

$$nc = \sum_{k=1}^{n} \int_G |(T_x e_k, e_1)|^2 \, dx = \int_G \sum_{k=1}^{n} |(T_x e_k, e_1)|^2 \, dx \leqslant \int_G \|e_1\|^2 \, dx = 1. \tag{7}$$

Формула (7) показывает, что размерность пространства представления H не может превосходить $1/c$ и поэтому она конечна.

Мы видели в следствии 5.3.2, что конечномерное унитарное представление любой группы вполне приводимо. Этот результат в случае компактных топологических групп может быть усилен следующим образом.

Теорема 4. *Каждое унитарное представление T группы G является прямой суммой неприводимых конечномерных унитарных подпредставлений.*

Доказательство. Покажем сначала, что оператор K_u, определенный в (4), имеет следующие свойства:

1° $K_u^* = K_u$,

2° K_u — оператор Гильберта—Шмидта,

3° каждое собственное подпространство H_i оператора K_u T-инвариантно,

4° $H = H_0 + \sum_i \oplus H_i$, $\dim H_i < \infty$, где H_0 — собственное подпространство оператора K_u с нулевым собственным значением, которое может быть бесконечномерно.

1°. Для каждых $v, w \in H$ имеем

$$(K_u v, w) = \int (v, T_x u)(T_x u, w) \, dx = \int \overline{(w, T_x u)} (v, T_x u) \, dx =$$

$$= \left(v, \int (w, T_x u) T_x u \, dx\right) = (v, K_u w).$$

Поэтому $K_u^* = K_u$.

2°. Напомним, что оператор A является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда для произвольного базиса $\{e_i\}$ в H мы имеем $\sum_i \|Ae_i\|^2 < \infty$. В нашем случае имеем

$$\sum_i \|K_u e_i\|^2 = \sum_i \int_G \int_G (e_i, T_x u)(T_x u, T_y u)(T_y u, e_i)\,dx\,dy =$$
$$= \int_G \int_G \sum_i (e_i, T_x u)(T_x u, T_y u)(T_y u, e_i)\,dx\,dy =$$
$$= \int_G \int_G (T_x u, T_y u)(T_y u, T_x u)\,dx\,dy < \infty. \tag{8}$$

Замена порядка суммирования и интегрирования оправдана теоремой Лебега и тем, что

$$\sum_i |(e_i, T_x u)(T_y u, e_i)|^2 \leqslant \Big(\sum_i |(e_i, T_x u)|^2 \sum_k |(e_k, T_y u)|^2\Big)^{1/2} = \|u\|^2.$$

4°. Это свойство следует из спектральной теоремы Реллиха—Гильберта—Шмидта для компактных операторов (см. приложение Б.3).

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Для всех векторов $v \in H$, которые не ортогональны u, имеем $(K_u v, v) > 0$ [см. формулу (6) и ниже]. Таким образом, оператор K_u имеет по крайней мере одно отличное от нуля собственное значение, т. е. пространство $H \ominus H_0$ не пустое.

Следовательно, мы показали, что пространство $H \ominus H_0 = \sum_i \oplus H_i$ является прямой ортогональной суммой конечномерных инвариантных подпространств H_i. Используя следствие 5.3.2, мы можем разбить каждое H_i в прямую ортогональную сумму неприводимых инвариантных подпространств. Чтобы разбить пространство H_0, мы рассматриваем подпредставление $T_x^0 \equiv {}^{H_0}T_x$ и строим для него оператор (4). Тогда, согласно свойствам 3° и 4° оператора K_u и следствию 5.3.2, мы заключаем, что H_0 содержит также нетривиальное конечномерное минимальное инвариантное подпространство. Из этих рассмотрений видно, что заключение справедливо для любого инвариантного подпространства.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4, покажем, что наименьшее подпространство M в H, содержащее все минимальные попарно ортогональные инвариантные подпространства, совпадает с H. В самом деле, поскольку T унитарно, а M инвариантно, то $M^\perp$ также инвариантно. Поэтому, согласно отмеченному заключению, $M^\perp$ содержит нетривиальное инвариантное конечномерное подпространство, что противоречит определению M. Следовательно, $M^\perp = 0$ и $M = H$.

Дальше мы выведем полезные соотношения ортогональности для матричных элементов неприводимых унитарных представлений.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть T^s и $T^{s'}$ — любые два неприводимые унитарные представления группы G, обозначенные индексами s и s' соответственно. Тогда их матричные элементы удовлетворяют соотношениям*

$$\int_G D^s_{ij}(x)\overline{D^{s'}_{mn}(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{если } T^s \text{ и } T^{s'} \text{ не эквивалентны,} \\ \frac{1}{d_s}\delta_{im}\delta_{jn}, & \text{если } T^s \cong T^{s'}, \end{cases} \tag{9}$$

где d_s — размерность представления T^s.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторы

$$E_{ij} = \int_G T^s_x e_{ij} T^{s'}_{x^{-1}}\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

где $(e_{ij})^{mn} = \delta^m_i \delta^n_j$, $i, m = 1, 2, \ldots, d_s$, $j, n = 1, 2, \ldots, d_s$. Для каждого $y \in G$ операторы (10) удовлетворяют соотношению

$$T^s_y E_{ij} = E_{ij} T^{s'}_y.$$

В самом деле,

$$T^s_y E_{ij} = \int_G T^s_{yx} e_{ij} T^{s'}_{x^{-1}}\,\mathrm{d}x = \int_G T^s_{x'} e_{ij} T^{s'}_{x'^{-1}y}\,\mathrm{d}x' = E_{ij} T^{s'}_y. \tag{11}$$

Следовательно, если T^s не эквивалентно $T^{s'}$, то, согласно лемме Шура, имеем $E_{ij} = 0$, или в матричной форме

$$\int_G D^s_{li}(x) D^{s'}_{jk}(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int_G D^s_{li}(x)\overline{D^{s'}_{kj}(x)}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

Если $s = s'$, то оператор, заданный формулой (10), также удовлетворяет условию (11) и, следовательно, согласно утверждению 5.4.3, $E_{ij} = \lambda_{ij} I$. Поэтому при $(l, i) \neq (k, j)$ соотношения ортогональности (12) все еще имеют место. Однако если $(l, i) = (k, j)$, то, согласно формулам (10) и $E_{ii} = \lambda_{ii} I$, получаем

$$(E_{ii})_{ll} = \int_G D^s_{li}(x) D^s_{il}(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int_G |D^s_{li}(x)|^2\,\mathrm{d}x = \lambda_{ii} \tag{13}$$

(суммирование отсутствует). Чтобы вычислить константу λ_{ii}, положим в (10) $i = j$ и возьмем след от обеих частей. Тогда получаем

$$\mathrm{Tr}\, E_{ii} = d_s \lambda_{ii} = \int_G \mathrm{Tr}\,(T^s_x e_{ii} T^s_{x^{-1}})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Tr}\, e_{ii} = 1,$$

или $\lambda_{ii} = 1/d_s$. Это завершает доказательство соотношения (9).

Теперь мы покажем, что правое регулярное представление содержит все неприводимые представления. В самом деле, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Каждое неприводимое унитарное представление T^s группы G эквивалентно подпредставлению правого регулярного представления.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{D^s_{jk}(x)\}$, $j, k = 1, 2, \ldots, d_s$ — матричная форма представления T^s и пусть H^s — подпространство в $L^2(G)$, натянутое на ортонормированные векторы $e^s_k = \sqrt{(d_s)}\, D^s_{1k}(x)$. Подпредставление $H^s T^R$ правого регулярного представления T^R неприводимо и эквивалентно T^s. Действительно,

$$T^R_{x_0} e^s_k(x) = D^s_{1k}(xx_0) = D^s_{1l}(x) D^s_{lk}(x_0) = D^s_{lk}(x_0) e^s_l(x).$$

Характер $\chi(x)$ конечномерного представления T группы G — это след оператора T_x, т. е.

$$\chi(x) = \operatorname{Tr} T_x = (T_x e_i, e_i) = D_{ii}(x). \tag{14}$$

Свойства характеров неприводимых унитарных представлений группы G резюмированы в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.

$$\begin{aligned}
&1^\circ \quad \chi(y^{-1}xy) = \chi(x),\\
&2^\circ \quad \chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)},\\
&3^\circ \quad \textit{если } T^s \simeq T^{s'}, \textit{ то } \chi^s = \chi^{s'},\\
&4^\circ \quad \int_G \chi^s(x)\overline{\chi^{s'}(x)}\,dx = \begin{cases} 0, & \textit{если } T^s \neq T^{s'},\\ 1, & \textit{если } T^s \simeq T^{s'}.\end{cases}
\end{aligned} \tag{15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. $\chi(y^{-1}xy) = \operatorname{Tr}(T_{y^{-1}xy}) = \operatorname{Tr}(T_{y^{-1}}T_xT_y) = \operatorname{Tr} T_x = \chi(x)$.

2°. $\chi(x^{-1}) = \operatorname{Tr} T_{x^{-1}} = \operatorname{Tr} T^*_x = \overline{D_{ii}(x)} = \overline{\chi(x)}$.

3°. Если $T \simeq T'$, то $T = S^{-1}T'S$ и $\operatorname{Tr} T_x = \operatorname{Tr} S^{-1}T'_xS = \operatorname{Tr} T'_x$.

4°. Согласно (9),

$$\int_G \chi^s(x)\overline{\chi^{s'}(x)}\,dx = \int_G D^s_{ii}(x)\overline{D^{s'}_{jj}(x)}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } T^s \neq T^{s'},\\ 1, & \text{если } T^s \simeq T^{s'}.\end{cases}$$

Пусть T — конечномерное представление группы G. Тогда, согласно следствию 5.3.2 и формуле (14), мы имеем

$$\chi(x) = m_i\chi_i(x), \tag{16}$$

где m_i — кратность, с которой неприводимое представление T^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, группы G содержится в разложении представления T. Используя (15) 4°, получаем

$$m_i = \int_G \chi(x)\overline{\chi_i(x)}\,dx \tag{17}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx. \tag{18}$$

Соотношение (17) показывает, что характер χ определяет конечномерное представление T группы G с точностью до эквивалентности. Формула (18) может использоваться как критерий неприводимости представления T; именно, представление T неприводимо тогда и только тогда, когда $\int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx = 1$. Если T приводимо, то $\int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx > 1$.

§ 2. Аппроксимационные теоремы Петера—Вейля и Вейля

В этом параграфе мы докажем несколько полезных теорем, которые позволят нам распространить обычный анализ Фурье на вещественной прямой до гармонического анализа на компактных группах. Начнем со знаменитой теоремы Петера—Вейля.

Теорема 1 (Петер—Вейль). *Пусть $\widehat{G} = \{T^s\}$ — множество всех неприводимых неэквивалентных унитарных представлений группы G. Функции*

$$\sqrt{(d_s)}\,D^s_{jk}(x), \quad s \in \widehat{G}, \quad 1 \leqslant j, \ k \leqslant d_s, \tag{1}$$

где d_s — размерность представления T^s, а $D^s_{jk}(x)$ — матричные элементы представления T^s, образуют полную ортонормированную систему в $L^2(G)$.

Доказательство. Пусть L — линейное замкнутое подпространство в $L^2(G)$, натянутое на все функции (1), и пусть $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L. Пространство L инвариантно при правых сдвигах T^R (см. доказательство утверждения 1.6). Поэтому, согласно утверждению 5.3.1, $L^\perp$ также является подпространством, инвариантным относительно T^R. Пусть $0 \neq v \in L^\perp$. Положим

$$u(x) = \int \left(T^R_x v(y)\right)\overline{v(y)}\,dy. \tag{2}$$