где m_i — кратность, с которой неприводимое представление T^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, группы G содержится в разложении представления T. Используя (15) 4°, получаем

$$m_i = \int_G \chi(x)\overline{\chi_i(x)}\,dx \tag{17}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx. \tag{18}$$

Соотношение (17) показывает, что характер χ определяет конечномерное представление T группы G с точностью до эквивалентности. Формула (18) может использоваться как критерий неприводимости представления T; именно, представление T неприводимо тогда и только тогда, когда $\int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx = 1$. Если T приводимо, то $\int_G \chi(x)\overline{\chi(x)}\,dx > 1$.

§ 2. Аппроксимационные теоремы Петера—Вейля и Вейля

В этом параграфе мы докажем несколько полезных теорем, которые позволят нам распространить обычный анализ Фурье на вещественной прямой до гармонического анализа на компактных группах. Начнем со знаменитой теоремы Петера—Вейля.

Теорема 1 (Петер—Вейль). *Пусть $\widehat{G} = \{T^s\}$ — множество всех неприводимых неэквивалентных унитарных представлений группы G. Функции*

$$\sqrt{(d_s)}\,D^s_{jk}(x), \quad s \in \widehat{G}, \quad 1 \leqslant j, \ k \leqslant d_s, \tag{1}$$

где d_s — размерность представления T^s, а $D^s_{jk}(x)$ — матричные элементы представления T^s, образуют полную ортонормированную систему в $L^2(G)$.

Доказательство. Пусть L — линейное замкнутое подпространство в $L^2(G)$, натянутое на все функции (1), и пусть $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L. Пространство L инвариантно при правых сдвигах T^R (см. доказательство утверждения 1.6). Поэтому, согласно утверждению 5.3.1, $L^\perp$ также является подпространством, инвариантным относительно T^R. Пусть $0 \neq v \in L^\perp$. Положим

$$u(x) = \int \left(T^R_x v(y)\right)\overline{v(y)}\,dy. \tag{2}$$

Это непрерывная функция на G, принадлежащая $L^{\perp}$. В самом деле, из (2) имеем

$$\int u(x)\overline{D^s_{jk}(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_l \int v(x)\overline{D^s_{jl}(x)}\,\mathrm{d}x \int \overline{v(y)\overline{D^s_{kl}(y)}}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Более того, $u(e) = \|v\|^2 > 0$. Теперь положим

$$w(x) = u(x) + \overline{u(x^{-1})} \tag{3}$$

и рассмотрим оператор

$$A\psi(x) = \int w(xy^{-1})\,\psi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

В силу (3) и в силу конечности инвариантной меры на G A является самосопряженным компактным оператором. Поскольку $w \neq 0$, то существует собственное значение λ, $\lambda \neq 0$ и конечномерное собственное подпространство $H(\lambda)$ оператора A. Пусть $\psi_\lambda(x)$ — собственная функция оператора A. В силу (4) мы имеем

$$\int \psi_\lambda(x)\overline{D^s_{ij}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int (A\psi_\lambda)(x)\overline{D^s_{ij}(x)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\sum_k \int w(x')\overline{D^s_{ik}(x')}\,\mathrm{d}x' \int \psi_\lambda(x)\overline{D^s_{jk}(x)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Поэтому $\psi_\lambda(x) \in L^{\perp}$. Оператор A T^R-инвариантен. В самом деле, $(T^R_z A\psi)(x) = \int w(xzy^{-1})\,\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int w(xy^{-1})\,\psi(zy)\,\mathrm{d}y = (AT^R_z\psi)(x)$. Следовательно, $H(\lambda)$ также инвариантно относительно T^R и формула $T_x\psi_\lambda(y) = \psi_\lambda(yx)$ определяет представление группы G в $H(\lambda)$. Это представление вполне приводимо. Пусть $\{e^s_k\}_1^{d_s}$ — базис неприводимого подпространства $H^s(\lambda)$ пространства $H(\lambda)$, заданный собственными функциями оператора A. Мы имеем

$$T^R_x e^s_k(y) = e^s_k(yx) = D^s_{jk}(x)\,e^s_j(y).$$

Так как все собственные функции оператора A непрерывны, имеем (суммирование по s отсутствует)

$$e^s_k(x) = D^s_{jk}(x)\,e^s_j(e),$$

т. е. $e^s_k \in L$. Поэтому $H(\lambda) = \{0\}$, что противоречит предыдущему заключению. Следовательно, по (3) и (2) $L^{\perp} = 0$.

Следствие. *Пусть* $u(x) \in L^2(G)$. *Тогда*

$$u(x) = \sum_{s \in \widehat{G}} \sum_{j,k=1}^{d_s} c_{jk}^s D_{jk}^s(x) \tag{4'}$$

и

$$\int_G |u(x)|^2 \, dx = \sum_{s \in \widehat{G}} d_s \sum_{j,k=1}^{d_s} |c_{jk}^s|^2, \tag{5}$$

где

$$c_{jk}^s = d_s \int_G u(x) \overline{D_{jk}^s(x)} \, dx \tag{6}$$

и сходимость в (4′) *понимается в смысле нормы в* $L^2(G)$.

Доказательство. Формула (4′) следует из полноты множества функций (1). Чтобы доказать (5), положим $u(x) = u_N(x) + \varepsilon_N(x)$, где

$$u_N(x) = \sum_{s=1}^{N} \sum_{j,k=1}^{d_s} c_{jk}^s D_{jk}^s(x).$$

Ясно, что $\|\varepsilon_N(x)\| \to 0$ при $N \to \infty$. Тогда, согласно соотношениям ортогональности (1.9), получаем

$$\int_G |u(x)|^2 \, dx = \sum_{s=1}^{N} d_s^{-1} \sum_{j,k=1}^{d_s} |c_{jk}^s|^2 + (u_N, \varepsilon_N) + (\varepsilon_N, u_N) + (\varepsilon_N, \varepsilon_N).$$

Используя неравенство Шварца, получаем

$$\left| \int_G |u(x)|^2 \, dx - \sum_{s=1}^{N} \sum_{j,k=1}^{d_s} |c_{jk}^s|^2 \right| \leqslant (2\|u_N\| + \|\varepsilon_N\|)\|\varepsilon_N\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Равенство (5) называется *равенством Парсеваля*.

Из утверждения 1.6 мы знаем, что каждое неприводимое унитарное представление группы G является подпредставлением правого регулярного представления. Более того, мы также знаем из теоремы 1.4, что регулярное представление является прямой суммой неприводимых унитарных (следовательно, конечномерных) представлений. Следующая теорема завершает описание структуры регулярного представления с помощью его неприводимых компонент.

Теорема 2. *Каждое неприводимое унитарное представление* T^s *группы* G *появляется в разложении регулярного представления*

с кратностью, равной размерности представления T^s. На ортонормированные векторы

$$Y^s_{(j)\,k}(x) = \sqrt{d_s}\, D^s_{jk}(x), \quad s \in \widehat{G}, \quad j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ d_s, \tag{7}$$

при фиксированных j и s натягиваются инвариантные неприводимые подпространства правого регулярного представления, а на ортонормированные векторы

$$\tilde{Y}^s_{k\,(j)}(x) = \sqrt{d_s}\, \overline{D^s_{kj}(x)}, \quad s \in \widehat{G}, \quad j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ d_s, \tag{8}$$

при фиксированных j и s натягиваются инвариантные неприводимые подпространства левого регулярного представления.

Доказательство. Обозначим через $H^s_{(j)}$, где $s \in \widehat{G}$, а j фиксировано, инвариантные неприводимые подпространства в $H = L^2(G)$, натянутые на ортонормированные вектора (7). Пусть $u(x) \in L^2(G)$. Согласно формуле (4), имеем

$$u(x) = \sum_{s \in \widehat{G}} \sum_{j,\ k=1}^{d_s} c^s_{jk} D^s_{jk}(x) = \sum_{s \in \widehat{G}} \sum_{j=1}^{d_s} u^s_{(j)}(x), \tag{9}$$

где $u^s_{(j)} \in H^s_{(j)}$. Поскольку $H^s_{(j)} \perp H^{(s')}_{(j')}$, если $(s,\ j) \neq (s',\ j')$, то разложение (9) однозначно. Поэтому

$$H = \sum_{s \in \widehat{G}} \sum_{j=1}^{d_s} \oplus H^s_{(j)}. \tag{10}$$

Более того,

$$T^R_{x_0} u(x) = \sum_{s \in \widehat{G}} \sum_{j=1}^{d_s} {}^{H^s_{(j)}}T^R_{x_0} u^s_{(j)}(x), \tag{11}$$

где ${}^{H^s_{(j)}}T^R$ — неприводимые унитарные подпредставления представления T^R в $H^s_{(j)}$, заданные формулой

$${}^{H^s_{(j)}}T^R_{x_0} Y^s_{(j)\,k}(x) = D^s_{lk}(x_0)\, Y^s_{(j)\,l}(x). \tag{12}$$

Итак, для каждого $l = 1, 2, \ldots, d_s$ ${}^{H^s_{(j)}}T^R \simeq T^s$ и, следовательно, по определению 5.3.3

$$T^R = \sum_{s \in \widehat{G}} \oplus d_s T^s. \tag{13}$$

Такой же результат может быть доказан для левого регулярного представления, если в качестве базисных векторов неприводимых подпространств взять функции (8).

Теорема Петера—Вейля может быть значительно усилена. Для непрерывных функций на G вместо аппроксимации по норме про-

странства L^2 мы можем получить равномерную аппроксимацию. Это составляет содержание следующей аппроксимационной теоремы Вейля.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть f — непрерывная функция на G. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация*

$$\sum_{s=1}^{N_\varepsilon} \sum_{j,k} c_{jk}^s D_{jk}^s(x)$$

матричных элементов неприводимых унитарных представлений, такая, что

$$\left| f(x) - \sum_{s=1}^{N_\varepsilon} \sum_{j,k=1}^{d_s} c_{jk}^s D_{jk}^s(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in G. \tag{14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему 3, используя метод так называемых операторов сглаживания. Этот метод очень полезен при решении многих задач в теории представлений. Пусть $\varphi \in C(G)$, $f \in L^2(G)$, и пусть L_φ — оператор

$$L_\varphi f(x) = \int_G \varphi(y)\, T_y^L f(x)\, dy = \int_G \varphi(y) f(y^{-1}x)\, dy. \tag{15}$$

Операция (15) также обозначается через $\varphi * f$ и называется *сверткой* функций φ и f. Оператор L_φ имеет следующие свойства:

1° он является непрерывным отображением из $L^2(G)$ в $C(G)$,

2° если H_N — множество конечных линейных комбинаций

$$\sum_{s=1}^{N} \sum_{j,k} c_{jk}^s D_{jk}^s(x),$$

где $D_{jk}^s(x)$ — матричные элементы неприводимого унитарного представления группы G, то

$$L_\varphi(H_N) \subset H_N. \tag{16}$$

В самом деле, используя неравенство Коши, имеем

$$|L_\varphi f(x)|^2 = \left| \int_G \varphi(y) f(y^{-1}x)\, dy \right|^2 \leqslant \int_G |\varphi(y)|^2 dy \int_G |f(y^{-1}x)|^2 dy.$$

Пусть $\|f\|_{C(G)} \equiv \sup_{x \in G} |f(x)|$. Тогда

$$\|L_\varphi f\|_{C(G)} \leqslant c\|f\|_{L^2}, \quad \text{где} \quad c = \|\varphi\|_{L^2}. \tag{17}$$

Более того, если $f_N(x) \in H_N$, мы имеем

$$L_\varphi f_N(x) = \sum_{s=1}^{N} \sum_{j,k} c_{jk}^s \int_G \varphi(y) D_{jk}^s(y^{-1}x)\,dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \sum_{j,k,p} c_{jk}^s D_{pk}^s(x) \int_G \varphi(y) D_{jp}^s(y^{-1})\,dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \sum_{k,p} \tilde{c}_{pk}^s D_{pk}^s(x) \in H_N, \quad \text{где} \quad \tilde{c}_{pk}^s = \sum_j c_{pj}^s(\varphi)\, c_{jk}^s(f).$$

Чтобы доказать основную теорему, пусть f — любой элемент из $C(G)$. Поскольку любая непрерывная функция на G, согласно утверждению 2.2.4, равномерно непрерывна, то существует окрестность V_ε единицы, такая, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{как только} \quad x_1 x_2^{-1} \in V_\varepsilon. \tag{18}$$

Пусть $\varphi_\varepsilon \in C(G)$ — неотрицательная функция, которая отличается от нуля только на V_ε и удовлетворяет условию $\int_G \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$. Тогда для сглаженного оператора L_{φ_ε} получаем

$$\|L_{\varphi_\varepsilon} f - f\|_{C(G)} < \varepsilon. \tag{19}$$

В самом деле, согласно (18),

$$\|L_{\varphi_\varepsilon} f - f\|_{C(G)} = \sup_{x \in G} \left| \int_G \varphi_\varepsilon(y)[f(y^{-1}x) - f(x)]\,dy \right| =$$

$$= \sup_{x \in G} \int_{V_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,|f(x^{-1}y) - f(y)|\,dx < \varepsilon.$$

Из теоремы 1 мы знаем, что каждый элемент $f \in C(G)$ может быть как угодно аппроксимирован по норме в $L^2(G)$ элементами из H_N, т. е., в частности,

$$\|f - f_N\|_{L^2} \leqslant \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^{-1} \varepsilon.$$

Итак, согласно формулам (19) и (17), мы имеем

$$|f(x) - L_{\varphi_\varepsilon} f_N(x)| \leqslant |f(x) - L_{\varphi_\varepsilon} f(x)| + |L_{\varphi_\varepsilon}(f(x) - f_N(x))| <$$

$$< \varepsilon + \|f - f_N\|_{L^2} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2} < 2\varepsilon.$$

Поскольку функция $L_{\varphi_\varepsilon} f_N(x)$, $f_N \in H_N$, является элементом из H_N, то доказательство теоремы 3 завершено.

Заметим, что из формул (4) и (6) мы получаем соотношение

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{d_s} d_s \overline{D^s_{jk}(x')} D^s_{jk}(x) = \delta(x - x'). \tag{20}$$

Это альтернативная форма соотношения полноты для D^s_{jk}-функций, которая очень полезна в вычислениях.

§ 3. Проективные операторы и неприводимые представления

В этом параграфе рассматриваются свойства проективных операторов, сопоставляемых с неприводимыми представлениями компактных групп. Техника проективных операторов очень полезна, изящна и эффективна при решении различных практических задач теории представлений и квантовой физики.

Пусть $D^s_{pq}(x)$ — матричные элементы неприводимого представления T^s. Определим операторы

$$P^s_{pq} \equiv d_s \int_G \overline{D^s_{pq}(x)} T_x \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где d_s — размерность неприводимого представления T^s, $\mathrm{d}x$ — инвариантная мера Хаара на G, $x \to T_x$ — унитарное представление группы G в пространстве H.

Поскольку $D^s_{pq}(x)$ и T_x — непрерывные функции на G и поскольку G компактна, то операторный интеграл (1) вполне определен (см. приложение Б.2). В частности, все операторы P^s_{pq} ограничены. В самом деле,

$$\| P^s_{pq} u \| \leqslant d_s \int |\overline{D^s_{pq}(x)}| \| T_x u \| \mathrm{d}x \leqslant d_s \sup_{x \in G} |D^s_{pq}(x)| \| u \|.$$

Поэтому

$$\| P^s_{pq} \| \leqslant d_s \sup_{x \in G} |D^s_{pq}(x)|.$$

Утверждение 1. *Операторы P^s_{pq} имеют следующие свойства:*

1° $(P^s_{pq})^* = P^s_{qp}$, (2)

2° $P^s_{pq} P^{s'}_{p'q'} = \delta^{ss'} \delta_{qp'} P^s_{pq'}$. (3)

Доказательство. 1°. Поскольку для каждого ограниченного оператора A мы имеем $\| A^* \| = \| A \|$, то отображение $A \to A^*$ непрерывно в слабой операторной топологии. Поэтому в (1)