Заметим, что из формул (4) и (6) мы получаем соотношение

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{d_s} d_s \overline{D^s_{jk}(x')} D^s_{jk}(x) = \delta(x - x'). \tag{20}$$

Это альтернативная форма соотношения полноты для D^s_{jk}-функций, которая очень полезна в вычислениях.

§ 3. Проективные операторы и неприводимые представления

В этом параграфе рассматриваются свойства проективных операторов, сопоставляемых с неприводимыми представлениями компактных групп. Техника проективных операторов очень полезна, изящна и эффективна при решении различных практических задач теории представлений и квантовой физики.

Пусть $D^s_{pq}(x)$ — матричные элементы неприводимого представления T^s. Определим операторы

$$P^s_{pq} \equiv d_s \int_G \overline{D^s_{pq}(x)} T_x \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где d_s — размерность неприводимого представления T^s, $\mathrm{d}x$ — инвариантная мера Хаара на G, $x \to T_x$ — унитарное представление группы G в пространстве H.

Поскольку $D^s_{pq}(x)$ и T_x — непрерывные функции на G и поскольку G компактна, то операторный интеграл (1) вполне определен (см. приложение Б.2). В частности, все операторы P^s_{pq} ограничены. В самом деле,

$$\| P^s_{pq} u \| \leqslant d_s \int |\overline{D^s_{pq}(x)}| \| T_x u \| \mathrm{d}x \leqslant d_s \sup_{x \in G} |D^s_{pq}(x)| \| u \|.$$

Поэтому

$$\| P^s_{pq} \| \leqslant d_s \sup_{x \in G} |D^s_{pq}(x)|.$$

Утверждение 1. *Операторы P^s_{pq} имеют следующие свойства:*

1° $(P^s_{pq})^* = P^s_{qp}$, (2)

2° $P^s_{pq} P^{s'}_{p'q'} = \delta^{ss'} \delta_{qp'} P^s_{pq'}$. (3)

Доказательство. 1°. Поскольку для каждого ограниченного оператора A мы имеем $\| A^* \| = \| A \|$, то отображение $A \to A^*$ непрерывно в слабой операторной топологии. Поэтому в (1)

мы можем переставить операции сопряжения и интегрирования, т. е.

$$(P^s_{pq})^* = d_s \int_G D^s_{pq}(x)\, T^*_x \,\mathrm{d}x = d_s \int_G D^s_{pq}(x^{-1})\, T_x \,\mathrm{d}(x^{-1}) =$$

$$= d_s \int \overline{D^s_{qp}(x)}\, T_x \,\mathrm{d}x = P^s_{qp},$$

где мы использовали то, что $T^*_x = T^{-1}_x = T_{x^{-1}}$, и инвариантность меры Хаара.

2°. Из (1) следует, что

$$P^s_{pq} P^{s'}_{p'q'} = d_s d_{s'} \int \overline{D^s_{pq}(x)}\, \overline{D^{s'}_{p'q'}(x')}\, T_x T_{x'} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}x'.$$

Используя групповое свойство $T_x T_{x'} = T_{xx'}$ и соотношение

$$D^s_{pq}(x) = D^s_{pq}(\tilde{x}x'^{-1}) = D^s_{pr}(\tilde{x})\, D^s_{rq}(x'^{-1}) = D^s_{pr}(\tilde{x})\, \overline{D^s_{qr}(x')},$$

где $xx' = \tilde{x}$, а также соотношения ортонормировки (1.9), мы получаем

$$P^s_{pq} P^{s'}_{p'q'} = d_s d_{s'} \int D^s_{qr}(x')\, \overline{D^{s'}_{p'q'}(x')}\, \mathrm{d}x' \int \overline{D^s_{pr}(\tilde{x})}\, T_{\tilde{x}}\, \mathrm{d}\tilde{x} = \delta^{ss'} \delta_{qp'} P^s_{pq'}.$$

Следствие. *Операторы $P^s_p \equiv P^s_{pp}$ являются проективными операторами*, т. е.

$$(P^s_p)^* = P^s_p, \quad P^s_p P^{s'}_{p'} = \delta^{ss'} \delta_{pp'} P^s_p. \tag{4}$$

Операторы P^s_{pq} имеют простые трансформационные свойства относительно действия группы G. Действительно, мы имеем

Утверждение 2. *Пусть P^s_{pq} заданы формулой* (1). *Тогда* (*суммирование по s отсутствует*)

$$T_x P^s_{pq} = D^s_{rp}(x)\, P^s_{rq}, \tag{5}$$

$$P^s_{pq} T_x = D^s_{qr}(x)\, P^s_{pr}. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку T_x непрерывен, то он может быть перенесен под знак интеграла в (1). Используя групповые свойства функций D^s_{pq}, получаем

$$T_x P^s_{pq} = d_s \int \overline{D^s_{pq}(x')}\, T_{xx'} \,\mathrm{d}x' = d_s \int \overline{D^s_{pq}(x^{-1}\tilde{x})}\, T_{\tilde{x}} \,\mathrm{d}\tilde{x} =$$

$$= d_s D^s_{rp}(x) \int \overline{D^s_{rq}(\tilde{x})}\, T_{\tilde{x}} \,\mathrm{d}\tilde{x} = D^s_{rp}(x)\, P^s_{rq}.$$

Формула (6) доказывается подобным же образом.

Заметим, что в силу (5) векторы

$$|s;\ p\rangle = P^s_{pq} u, \quad q \text{ фиксировано}, \quad u \in H,$$

преобразуются как базисные векторы пространства H^s неприводимого представления T^s. Этот факт является отправной точкой

большинства применений проективных операторов P^s_{pq} (см. § 4.А и § 4.Б).

Заметим также, что, согласно (5) и (6), мы имеем

$$T_x P^s_{pq} T_x^{-1} = D^s_{rp}(x)\,\overline{D^s_{tq}(x)}\,P^s_{rt}. \tag{7}$$

Формула (7) означает, что P^s_{pq} преобразуется как тензорный оператор, соответствующий тензорному произведению базисного вектора e^s_q и вектора, сопряженного с e^s_q (т. е. в обозначениях Дирака как произведение $|s;\ p\rangle\langle s;\ q|$).

Существуют также полезные проективные операторы, сопоставляемые с характерами

$$\chi^s(x) = \sum_{p=1}^{d_s} D^s_{pp}(x).$$

Они определяются следующим образом:

$$P^s = d_s \int_G \chi^s(x)\,T_x\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Утверждение 3. *Операторы P^s имеют следующие свойства:*

$$(P^s)^* = P^s, \tag{9}$$

$$P^s P^{s'} = \delta_{SS'} P^s, \tag{10}$$

$$T_x P^s = P^s T_x. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $P^s = \sum P^s_p$, то формулы (9) и (10) сразу следуют из утверждений 1 и 2, а (11) следует из (8) и из того факта, что $\chi(x) = \chi(yxy^{-1})$.

Докажем еще один полезный результат.

Утверждение 4. *Пусть T — унитарное представление группы G в H. Тогда*

$$\sum_s P^s = I \tag{12}$$

и

$$\sum_{s,\,p} P^s_p = I. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\{e^s_r\}$ — базис в H. Тогда в силу (8)

$$\sum_{s'} P^{s'} e^s_r = \sum_{s'} d_{s'} \int \mathrm{d}x \sum_p \overline{D^{s'}_{pp}(x)}\,D^s_{mr}(x)\,e^s_m = e^s_r. \tag{14}$$

Отсюда следует (12). Соотношение (13) следует из определения операторов P^s и из (12).

Пример. Пусть $G = SO(3)$. Если мы описываем вращения с помощью углов Эйлера φ, θ и ψ,

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi, \tag{15}$$

то в силу упражнения 5.8.1.1 и (3.11.30) имеем

$$d_J = 2J + 1, \quad dx = (8\pi^2)^{-1} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi,$$

$$D^J_{M,\,M}(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^M P^{0,\,2M}_{J-M}(\cos\theta) \exp[-iM(\varphi+\psi)], \tag{16}$$

$$\chi(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \sum_{M=-J}^{J} D^J_{MM}(\varphi,\ \theta,\ \psi),$$

$$T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} = \exp(-i\varphi J_z) \exp(-i\theta J_y) \exp(-i\psi J_z).$$

Следовательно, проективные операторы P^J_M и P^J задаются формулами

$$P^J_M = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int \overline{D^J_{MM}(\varphi,\ \theta,\ \psi)} T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi, \tag{17}$$

$$P^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int \overline{\chi^J(\varphi,\ \theta,\ \psi)} T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi. \tag{18}$$

§ 4. Приложения

А. *Разложение фактор-представления на неприводимые представления*

Во многих задачах неприводимое представление T^s группы G входит в пространство представления H несколько раз. Во многих приложениях требуется разложить фактор-представление $n_s T^s$ (суммирование отсутствует) на неприводимые компоненты и явно построить соответствующие ортогональные пространства. Мы решаем эти задачи, используя проективные операторы P^s_{pq}. Как отмечалось, векторы

$$|s;\ p\rangle \equiv P^s_{pq} u, \quad q \text{ фиксировано}, \quad u \in H, \tag{1}$$

преобразуются как базисные векторы e^s_p пространства H^s неприводимого представления T^s, т. е.

$$T_x |s;\ p\rangle = D^s_{rp}(x) P^s_{rq} u = D^s_{rp}(x) |s;\ r\rangle. \tag{2}$$

Это соотношение дает простой и изящный метод явного построения ортогональных базисных векторов $|s;\ p\rangle$ неприводимого пространства H^s из векторов гильбертова пространства H, в котором реализуется приводимое унитарное представление T группы G. Рассмотрим раньше случай, когда каждое неприводимое представление T^s появляется в разложении представления T только один раз. Пусть $P^s_{pq} u \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots, d_s$ (d_s — размерность