Пример. Пусть $G = SO(3)$. Если мы описываем вращения с помощью углов Эйлера φ, θ и ψ,

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi, \tag{15}$$

то в силу упражнения 5.8.1.1 и (3.11.30) имеем

$$d_J = 2J + 1, \quad dx = (8\pi^2)^{-1} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi,$$

$$D^J_{M,\,M}(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^M P^{0,\,2M}_{J-M}(\cos\theta) \exp[-iM(\varphi+\psi)], \tag{16}$$

$$\chi(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \sum_{M=-J}^{J} D^J_{MM}(\varphi,\ \theta,\ \psi),$$

$$T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} = \exp(-i\varphi J_z) \exp(-i\theta J_y) \exp(-i\psi J_z).$$

Следовательно, проективные операторы P^J_M и P^J задаются формулами

$$P^J_M = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int \overline{D^J_{MM}(\varphi,\ \theta,\ \psi)} T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi, \tag{17}$$

$$P^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int \overline{\chi^J(\varphi,\ \theta,\ \psi)} T_{x(\varphi,\,\theta,\,\psi)} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi. \tag{18}$$

§ 4. Приложения

А. *Разложение фактор-представления на неприводимые представления*

Во многих задачах неприводимое представление T^s группы G входит в пространство представления H несколько раз. Во многих приложениях требуется разложить фактор-представление $n_s T^s$ (суммирование отсутствует) на неприводимые компоненты и явно построить соответствующие ортогональные пространства. Мы решаем эти задачи, используя проективные операторы P^s_{pq}. Как отмечалось, векторы

$$|s;\ p\rangle \equiv P^s_{pq} u, \quad q \text{ фиксировано}, \quad u \in H, \tag{1}$$

преобразуются как базисные векторы e^s_p пространства H^s неприводимого представления T^s, т. е.

$$T_x |s;\ p\rangle = D^s_{rp}(x) P^s_{rq} u = D^s_{rp}(x) |s;\ r\rangle. \tag{2}$$

Это соотношение дает простой и изящный метод явного построения ортогональных базисных векторов $|s;\ p\rangle$ неприводимого пространства H^s из векторов гильбертова пространства H, в котором реализуется приводимое унитарное представление T группы G. Рассмотрим раньше случай, когда каждое неприводимое представление T^s появляется в разложении представления T только один раз. Пусть $P^s_{pq} u \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots, d_s$ (d_s — размерность

неприводимого представления T^s) для некоторого $u \in H$ и для фиксированных s и q. Тогда векторы

$$|s;\ p\rangle \equiv \frac{1}{N} P^s_{pq} u,\quad p = 1, 2, \ldots, d_s,\ s \text{ и } q \text{ фиксированы}, \tag{3}$$

где $N^2 = (u,\ P^s_{qq} u)$, образуют ортонормированное множество векторов. В самом деле,

$$\langle s;\ p' | s;\ p\rangle = \frac{1}{N^2}(P^s_{p'q} u,\ P^s_{pq} u) = \frac{1}{N^2}(u, (P^s_{p'q})^* P^s_{pq} u) =$$

$$= \frac{1}{N^2}(u,\ P^s_{qp'} P^s_{pq} u) = \delta_{p'p} \frac{1}{N^2}(u,\ P^s_{qq} u) = \delta_{p'p}. \tag{4}$$

Согласно (2), замкнутая линейная оболочка H^s ортонормированных векторов (3) образует пространство, в котором реализуется неприводимое унитарное представление $T^s = \{D^s_{ij}\}$.

Замечательно, что этот метод работает даже в том случае, когда приводимое унитарное представление T содержит неприводимое представление T^s несколько, скажем (n_s), раз. В самом деле, пусть $T = \sum\limits_s \oplus\, n_s T^s$ — разложение представления T на фактор-представления $n_s T^s$, и пусть $H = \sum\limits_s \oplus\, n_s H_s$ — соответствующее разложение пространства H. Более того, пусть $H^s_q = P^s_q H$, где s и q произвольны, но фиксированы. Тогда мы имеем

Утверждение 1. *Если $u \neq 0$ — произвольный вектор из H^s_q, где s и q фиксированы, то существует только единственное подпространство $H^s_{(u)}$, содержащее этот вектор и являющееся пространством неприводимого представления $T^s = \{D^s_{ij}\}$.*

Если $u \neq 0$ и $v \neq 0$ — ортогональные векторы из H^s_q, то $H^s_{(u)}$ и $H^s_{(v)}$ являются ортогональными пространствами неприводимого представления $T^s = \{D^s_{ij}\}$.

Доказательство. Пусть $0 \neq u \in H^s_q$, и пусть $\|u\| = 1$. Векторы

$$|s;\ p\rangle = P^s_{pq} u,\quad p = 1, 2, \ldots, d_s\quad s \text{ и } q \text{ фиксированы}, \tag{5}$$

составляют ортонормированное множество векторов. Согласно (2), замкнутая линейная оболочка $H^s_{(u)}$ всех векторов (5) составляет пространство неприводимого представления $T^s = \{D^s_{ij}\}$. Вектор $|s, q\rangle = P^s_{qq} u = u$ не может лежать в двух различных неприводимых подпространствах $H^s_{(u)}$ и $\widehat{H}^s_{(u)}$, так как пересечение $L = H^s_{(u)} \cap \widehat{H}^s_{(u)}$ является инвариантным подпространством, удовлетворяющим следующим условиям:

$$L \subset H^s_{(u)},\quad L \subset \widehat{H}^s_{(u)},\quad L \neq H^s_{(u)},\quad L \neq \widehat{H}^s_{(u)}.$$

Следовательно, в силу неприводимости $H^s_{(u)}$ и $\widehat{H}^s_{(u)}$ это инвариантное подпространство пустое, т. е. $L = 0$.

Если $u \neq 0$ и $v \neq 0$ — ортогональные векторы из H^s_q, то пространства $H^s_{(u)}$ и $H^s_{(v)}$ являются ортогональными пространствами одного и того же неприводимого представления $T^s = \{D^s_{ij}\}$. В самом деле,

$$(P^s_{p'q}v,\ P^s_{p''q}u) = (v,\ (P^s_{p'q})^* P^s_{p''q}u) = (v,\ P^s_{qp'}P^s_{p''q}u) = \\ = \delta_{p'p''}(v,\ P^s_{qq}u) = \delta_{p'p''}(v,\ u) = 0.$$

Таким образом, беря последовательные ортогональные векторы из пространства H^s_q, мы получаем столько ортогональных пространств одного и того же неприводимого представления $T^s = \{D^s_{ij}\}$, какова размерность подпространства H^s_q. Ясно, что $\dim H^s_q = n_s$. Следовательно, утверждение 1 дает в общем случае систематический метод выделения неприводимых подпространств $H^s_{(u_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_s$, из приводимого пространства H. Оно производится следующими этапами:

1° Нахождение подпространства $H^s_q = P^s_q H$ (s фиксировано, q произвольно, но фиксировано).

2° Выбор в пространстве H^s_q произвольным образом ортогонального базиса $u_1, u_2, \ldots, u_{n_s}$, $n_s = \dim H^s_q$.

3° Последовательное применение формулы (5) к каждому из векторов u_i, $i = 1, 2, \ldots, n_s$, чтобы найти неприводимые подпространства $H^s_{(u_i)}$, содержащие эти векторы.

Согласно утверждению 1, соответствующие неприводимые подпространства $H^s_{(u_1)}, H^s_{(u_2)}, \ldots, H^s_{(u_{n_s})}$ попарно ортогональны. Их набор дает эффективное разложение приводимого подпространства $P^s H = n_s H^s$ на неприводимые компоненты $H^s_{(u_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_s$, в которых реализуется одно и то же неприводимое унитарное представление $T^s = \{D^s_{ij}\}$. Последовательно применяя этот метод ко всем s, получаем эффективное разложение представления T на неприводимые компоненты T^s.

Б. *Коэффициенты связывания* (*«коэффициенты Клебша—Гордана»*)

Пусть T^{s_1} и T^{s_2} — неприводимые представления группы G в гильбертовых пространствах H^{s_1} и H^{s_2} соответственно. Пусть $|s_i p_i\rangle$ — ортонормированный базисный вектор в H^{s_i}, $i = 1, 2$. Предположим сначала, что G *просто приводима*, т. е. что в *тензорном произведении* двух неприводимых представлений кратность

данного представления не превышает единицы. В тензорном произведении $H = H^{s_1} \otimes H^{s_2}$ мы можем построить два множества ортогональных базисных векторов. Первое состоит из кронекеровского произведения первоначальных базисных векторов:

$$|s_1p_1,\ s_2p_2\rangle = |s_1p_1\rangle\,|s_2p_2\rangle, \quad p_1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ d_{s_1}, \quad p_2 = 1,\ 2,\ \ldots,\ d_{s_2}, \tag{6}$$

а второе содержит базисные векторы

$$|sps_1s_2\rangle, \tag{7}$$

на которые натягивается неприводимое пространство H^s, содержащееся в пространстве $H^{s_1} \otimes H^{s_2} = \sum\limits_s \oplus H^s$. Согласно (3), базисные векторы (7) могут быть получены из базисных векторов (6) с помощью формулы

$$|s_1s_2sp\rangle = \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-1} d_s \int\limits_G \overline{D^s_{pp'}(x)}\, T_x\,|s_1p'_1s_2p'_2\rangle\, \mathrm{d}x, \tag{8}$$

где p', p'_1, p'_2 фиксированы, а $N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}$ — нормировочная константа. Оператор T_x действует на базисные векторы (6) по формуле

$$T_x\,|s_1p_1s_2p_2\rangle = D^{s_1}_{p'_1p_1}(x)\, D^{s_2}_{p'_2p_2}(x)\,|s_1p'_1s_2p'_2\rangle. \tag{9}$$

Так называемые коэффициенты Клебша—Гордана являются матричными элементами унитарного оператора (называемого *матрицей перехода*), связывающего базисные векторы (6) и (7), и согласно (8) и (9) задаются формулой

$$\langle s_1p_1s_2p_2\,|\,sps_1s_2\rangle = \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-1} d_s \int\limits_G \overline{D^s_{pp'}(x)}\, D^{s_1}_{p'_1p'_1}(x)\, D^{s_2}_{p'_2p'_2}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Чтобы найти нормировочную константу $N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}$, вычислим квадрат базисного вектора (8):

$$\begin{aligned}
1 &= \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-2} \langle s_1p'_1s_2p'_2\,|\,P^{s*}_{pp'}P^s_{pp'}\,|\,s_1p'_1s_2p'_2\rangle = \\
&= \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-2} \langle s_1p'_1s_2p'_2\,|\,P^s_{p'p'}\,|\,s_1p'_1s_2p'_2\rangle = \\
&= \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-2} d_s \int\limits_G \mathrm{d}x\, D^s_{p'p'}(x)\, \overline{D^{s_1}_{p'_1p'_1}(x)}\, \overline{D^{s_2}_{p'_2p'_2}(x)} = \\
&= \left(N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2}\right)^{-1} \overline{\langle s_1p'_1s_2p'_2\,|\,s_1s_2sp'\rangle}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$N^{ss_1s_2}_{p'p'_1p'_2} = \overline{\langle s_1p'_1s_2p'_2\,|\,s_1s_2sp'\rangle} = \langle s_1s_2sp'\,|\,s_1p'_1s_2p'_2\rangle. \tag{11}$$

Следовательно, мы видим, что нормировочная константа сама является другим коэффициентом Клебша—Гордана (К—Г). По-

скольку индексы p', p_1' и p_2' произвольны, мы можем выбрать коэффициент К—Г (11) как можно проще.

Коэффициент К—Г (10) не определяется однозначно. В самом деле, если мы умножим базисные векторы (6) на постоянные фазовые множители φ_s, $|\varphi_s| = 1$, то снова получим полную ортонормированную систему. Поэтому коэффициенты К—Г определяются с точностью до фазового множителя. Мы можем использовать эту произвольность, чтобы выбрать один из коэффициентов К—Г неотрицательным. Тогда нормировочная константа в (10) определяется однозначно. В самом деле, положив в (10) $p = p'$, $p_1 = p_1'$ и $p_2 = p_2'$, в силу (11) получаем

$$N_{p'p_1'p_2'}^{ss_1s_2} = \left[d_s \int_G \overline{D_{p'p'}^{s}(x)}\, D_{p_1'p_1'}^{s_1}(x)\, D_{p_2'p_2'}^{s_2}(x)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2}. \tag{12}$$

Таким образом, знание матричных элементов D_{pq}^{s} неприводимых представлений позволяет полностью определить коэффициенты К—Г для просто приводимых групп.

Если заданная группа G не просто приводима, то сначала мы разбиваем фактор-представление $n_s T^s$, содержащееся в тензорном произведении пространств, на неприводимые представления, используя технику раздела А. Построив базисные векторы (7) в пространствах $H_{(u_1)}^{s}$, $H_{(u_2)}^{s}$, ..., $H_{(u_{n_s})}^{s}$, поступаем так же, как и выше.

Формулы (10) и (12) составляют основу для явного определения коэффициентов К—Г компактных групп, представляющих физический интерес (таких как SO (3), SO (4), SU (3) и т. д.). Поскольку матричные элементы $D_{pq}^{s}(x)$ могут быть выражены в терминах произведений специальных функций (см. гл. 14), задача определения коэффициентов К—Г сводится к задаче интегрирования произведения трех специальных функций по конечной области.

В. *Физическое приложение: распределение состояний по изотопическому спину*

В дополнение к массе, общему угловому моменту (спину) и четности сильно взаимодействующим частицам могут быть приписаны определенные внутренние квантовые числа. Внутренние квантовые числа различают частицы с одними и теми же спином и четностью; они сохраняются при сильных взаимодействиях. В частности, каждой такой частице мы приписываем изотопический спин t, соответствующий группе SU (2) (внутренних) симметрий. Пусть I_1, I_2 и I_3 — генераторы этой группы SU (2). Состояние частицы тогда характеризуется вектором $|t, \theta, x\rangle$, где $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ и I_3 имеют собственные значения $t(t+1)$ и θ

соответственно и x обозначает остальное множество квантовых чисел. Когда мы имеем дело с таким квантовым числом, как изотопический спин, для набора свободных частиц мы берем пространство тензорных произведений $|t_1\theta_1, t_2\theta_2, \ldots\rangle$, и общий изотопический спин системы определяется векторной суммой $I = \sum_i t_i$. В процессе сильных соударений общий изотопический спин начальных частиц равен общему изотопическому спину конечных частиц. Другими словами, S-матрица, выражающая амплитуду вероятности перехода из начального состояния в конечное, коммутирует с представлением $g \to T_g$ группы SU (2) изотопического спина в гильбертовом пространстве векторов состояний. Более подробно о квантовомеханических свойствах инвариантности см. в гл. 13.

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц в реакции

$$A + B \to C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

где частица C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеет изоспин t_i и третью компоненту изоспина θ_i. Вероятность того, что определенное конечное состояние со значениями $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ будет найдено с заданными общим изоспином I и его третьей компонентой I_3, равна

$$P^I_{\theta_1, \ldots, \theta_n} = \left[\sum_\alpha |\langle t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n | II_3\alpha\rangle|^2\right]\left[\sum_{(\theta_i)}\sum_\alpha |\langle t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n | II_3\alpha\rangle|^2\right]^{-1}. \tag{13}$$

Здесь α обозначает все дополнительные изотопические квантовые числа, требуемые для полного описания n-частичного состояния в изоспиновом пространстве. Мы предположили, что каждое состояние α с фиксированными I, I_3 встречается с равной вероятностью. Используя технику проективных операторов, мы легко можем найти конечное выражение для вероятности (13). Фактически величина

$$\sum_\alpha |\langle t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n | II_3\alpha\rangle|^2 \tag{14}$$

и является квадратом проекции вектора $|t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n\rangle$ на подпространство в тензорном произведении, натянутое на базисные векторы $|I, I_3, \alpha\rangle$ с заданными I, I_3. Следовательно, если бы мы смогли явно вычислить длину этой проекции, то смогли бы обойтись без длинных вычислений компонент и определения полного множества квантовых чисел α. В общем случае в тензорном произведении одночастичных представлений $\prod_{i=1}^{n} \otimes T^{t_i}$ может оказаться больше, чем одно $(2I + 1)$-мерное подпространство представления T^I. Обозначим прямую сумму этих подпространств

через $\Gamma^{(I)}$. Тогда проекция на $\Gamma^{(I)}$ задается формулой (3.18), где теперь

$$P^{\Gamma^{(I)}} = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int \overline{\chi^{(I)}(\varphi, \theta, \psi)}\, T_{g\,(\varphi, \theta, \psi)} \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi, \qquad (15)$$

$$T_g = \prod_{k=1}^{n} T_g^{(k)}, \quad T_g^{(k)} = \exp[-i\varphi(t_k)_z] \exp[-i\theta(t_k)_y] \exp[-i\psi(t_k)_z],$$

или в матричном виде

$$[T_{g\,(\varphi, \theta, \psi)}]_{\theta_1'\theta_1, \ldots \theta_n'\theta_n} = \prod_{k=1}^{n} D^{t_k}_{\theta_k'\theta_k}(\varphi, \theta, \psi).$$

Квадрат проекции вектора $|t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n\rangle$ на $\Gamma^{(I)}$ равен

$$|P^{\Gamma^{(I)}}|t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n\rangle|^2 = \langle t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n|P^{\Gamma^{(I)}}|t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n\rangle.$$

Здесь мы использовали формулу (3.10). Следовательно,

$$P^I_{\theta_1, \ldots, \theta_n} = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int \overline{\chi^I(\varphi, \theta, \psi)} \prod_{k=1}^{n} D^{(t_k)}_{\theta_k\theta_k}(\varphi, \theta, \psi) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi. \quad (16)$$

Используя представление матричного элемента $D^J_{MM}(g)$ в виде (см. упражнение 5.8.1.1)

$$D^J_{MM}(\varphi, \theta, \psi) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^M P^{0,\,2M}_{J-M}(\cos\theta) \exp[-iM(\varphi+\psi)],$$

где $P^{0,\,2M}_{J-M}(x)$ — полином Якоби, и используя выражение (3.16) для $\chi^{(I)}$, после интегрирования по φ и ψ получаем

$$P^{(I)}_{\theta_1, \ldots, \theta_n} = (2I+1)\, 2^{-2I_3-1} \int_{-1}^{+1} dx\, (1+x)^{2I_3} P^{0,\,2I_3}_{I-I_3}(x) \prod_{i=1}^{n} P^{0,\,2\theta_i}_{t_i-\theta_i}(x). \quad (17)$$

При получении последней формулы было предположено, что $I_3 \geqslant 0$. Однако это не является ограничением, поскольку можно легко доказать, что

$$P^I_{\theta_1, \ldots, \theta_n} = P^I_{-\theta_1, \ldots, -\theta_n}.$$

Подынтегральная функция в (17) является полиномом степени $N = I + \sum_{i=1}^{n} t_i - 2I_3$. Если представим этот полином в виде

$$\sum_{j=0}^{N} a_j x^j,$$

то

$$P^I_{\theta_1, \ldots, \theta_n} = (2I+1)\, 2^{-2I_3} \sum_{j=0}^{[N/2]} \frac{a_{2j}}{2j+1}. \qquad (18)$$

Из (17) или (18) получаем конечное выражение для $P^I_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ для различных частных случаев:

1. Случай n пионов (т. е. $p+\bar{p}\to n_+\pi^+ + n_0\pi^0 + n_-\pi^-$)

$$P^I_{n_+,\,n_0,\,n_-} = (2I+1)\,2^{-2n_+-I+I_3}(-1)^{I-I_3}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{I-I_3}\binom{I-I_3}{\nu}\binom{I+I_3}{I-I_3-\nu}(-1)^\nu\,[A(2n_++\nu,\ n_0,\ I-I_3-\nu)+$$
$$+(-1)^{n_0}A(I-I_3-\nu,\ n_0,\ 2n_++\nu)],$$

где

$$A(a,\ b,\ c)\equiv\sum_{p=0}^{a}\binom{a}{p}\frac{(p+b)!\,c!}{(p+b+c+1)!}.$$

2. Случай одного нуклона и n пионов

$$P^I_{m_1;\,n_+,\,n_0,\,n_-} = (J+1)\,2^{-(n_++n_-+J+1)}(-1)^{J-M}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{J-M}(-1)^\nu\binom{J-M}{\nu}\binom{J+M+2}{J-M-\nu}[A(2n_++1+\nu,\ n_0,\ J-M-\nu)+$$
$$+(-1)^{n_0}A(J-M-\nu,\ n_0,\ 2n_++1+\nu)],$$

где $J=I-{}^1/_2$, $M=I_3-{}^1/_2$ и m_1 — третья компонента изоспина нуклона.

Заметим, что перестановки частиц одного и того же вида и заряда между собой не приводят к различным изоспиновым состояниям. Следовательно, чтобы найти вероятность определенного зарядового распределения, следует умножить коэффициент $P^I_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ на число перестановок компонент $\theta_1,\ldots,\theta_n$, которые приводят только к изменению порядка чисел $\theta_1,\ldots,\theta_n$. Например, вес зарядового распределения для n пионов без рассмотрения их импульсов задается формулой

$$\tilde{P}^I_{n_+,\,n_0,\,n_-}=\frac{n!}{n_+!\,n_0!\,n_-!}P^I_{n_+,\,n_0,\,n_-}.$$

§ 5. Представления конечных групп

В этом параграфе рассматриваются свойства конечных групп и их представления. Конечные группы имеют много важных приложений в квантовой физике, в особенности в атомной, молекулярной физике и физике твердого тела. По этой причине и для того, чтобы можно было рассматривать представления симметрической группы S_N, мы даем краткое изложение представлений конечных групп.