Из (17) или (18) получаем конечное выражение для $P^I_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ для различных частных случаев:

1. Случай n пионов (т. е. $p+\bar{p}\to n_+\pi^+ + n_0\pi^0 + n_-\pi^-$)

$$P^I_{n_+,\,n_0,\,n_-} = (2I+1)\,2^{-2n_+-I+I_3}(-1)^{I-I_3}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{I-I_3}\binom{I-I_3}{\nu}\binom{I+I_3}{I-I_3-\nu}(-1)^\nu\,[A(2n_++\nu,\ n_0,\ I-I_3-\nu)+$$
$$+(-1)^{n_0}A(I-I_3-\nu,\ n_0,\ 2n_++\nu)],$$

где

$$A(a,\ b,\ c)\equiv\sum_{p=0}^{a}\binom{a}{p}\frac{(p+b)!\,c!}{(p+b+c+1)!}.$$

2. Случай одного нуклона и n пионов

$$P^I_{m_1;\,n_+,\,n_0,\,n_-} = (J+1)\,2^{-(n_++n_-+J+1)}(-1)^{J-M}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{J-M}(-1)^\nu\binom{J-M}{\nu}\binom{J+M+2}{J-M-\nu}[A(2n_++1+\nu,\ n_0,\ J-M-\nu)+$$
$$+(-1)^{n_0}A(J-M-\nu,\ n_0,\ 2n_++1+\nu)],$$

где $J=I-{}^1/_2$, $M=I_3-{}^1/_2$ и m_1 — третья компонента изоспина нуклона.

Заметим, что перестановки частиц одного и того же вида и заряда между собой не приводят к различным изоспиновым состояниям. Следовательно, чтобы найти вероятность определенного зарядового распределения, следует умножить коэффициент $P^I_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ на число перестановок компонент $\theta_1,\ldots,\theta_n$, которые приводят только к изменению порядка чисел $\theta_1,\ldots,\theta_n$. Например, вес зарядового распределения для n пионов без рассмотрения их импульсов задается формулой

$$\tilde{P}^I_{n_+,\,n_0,\,n_-}=\frac{n!}{n_+!\,n_0!\,n_-!}P^I_{n_+,\,n_0,\,n_-}.$$

§ 5. Представления конечных групп

В этом параграфе рассматриваются свойства конечных групп и их представления. Конечные группы имеют много важных приложений в квантовой физике, в особенности в атомной, молекулярной физике и физике твердого тела. По этой причине и для того, чтобы можно было рассматривать представления симметрической группы S_N, мы даем краткое изложение представлений конечных групп.

Каждая конечная группа компактна. Поэтому все теоремы этой главы справедливы для конечных групп. Только во всех формулах необходимо заменить интегрирование по групповому многообразию $\int dx$ суммированием по групповым элементам.

А. *Симметрическая группа S_N*

Симметрическая группа S_N (группа перестановок N объектов, ее порядок равен $N!$) существенна в изучении конечных групп, в приложениях, а также в теории представлений непрерывных групп. Мы имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (Кели). *Каждая конечная группа G порядка N изоморфна подгруппе группы S_N.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим перестановку элементов из G, определенную левым умножением на элемент x:

$$ {}_x\pi = \downarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_N \\ xx_1 & xx_2 \cdots xx_N \end{pmatrix}. \tag{1} $$

Перестановку множества $(x_1, \ldots, x_N)$ в множество $(xx_1, \ldots, xx_N)$, т. е. элемент из S_N, мы обозначаем стрелкой (как выше). Все перестановки $\{{}_x\pi,\ x \in G\}$ образуют группу. Отображение f: $x \to {}_x\pi$ взаимно однозначно и

$$ f: xy \to {}_x\pi_y\pi = {}_{xy}\pi. $$

Ясно, что перестановку можно также определить правым умножением.

Элементы из S_N могут быть порождены более простыми элементами, называемыми циклами или транспозициями. *Цикл* представляет собой перестановку, в которой некоторые $r \leqslant N$ объектов переставляются между собой циклическим образом. Например,

$$ \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8)(9)(10), \tag{2} $$

где мы ввели стандартное обозначение для циклов. Цикл может быть записан иначе: $(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1) = (3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 1\ 2\ 3)$; произведение непересекающихся циклов коммутативно: $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) = (5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4)$; цикл с одним символом может опускаться в разложении (2). Цикл из двух символов называется *транспозицией*. Любой цикл может быть записан как произведение транспозиций: $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)$ (действие слева направо). Продолжая этот процесс, получаем следующую теорему.

§ 7.7. Для алгебры Ли so (3, 1) $\sim$ sl (2, C) с генераторами

$$J_k = \frac{1}{2} a^* \sigma_k a, \quad N_k = \frac{1}{2} \mathrm{i} (a^* \sigma_k C a^* + a C \sigma_k a), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

действующей на гильбертовом пространстве состояний, натянутом на

$$|jm\rangle = [(j+m)!\,(j-m)!]^{-1/2} a_1^{*\,(j+m)} a_2^{*\,(j-m)} |0\rangle,$$

покажите, что $C_2 = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2 = 0$ и $C_2' = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{N} = -3/4$. Если $|0\rangle$ или $a^* |0\rangle$ — нижайшее состояние, то получаем два самосопряженных представления с $j_0 = j_{\text{мин}} = 0$ или $\frac{1}{2}$ соответственно. Алгебра sl (2, C) имеет две серии унитарных представлений, обозначаемых двумя числами:

1) основная серия: $j_0 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, -\infty < a < \infty$;

2) дополнительная серия: $j_0 = 0$, $0 \leqslant \mathrm{i}a \leqslant 1$, где

$$C_2 = j_0 a, \quad C_2' = 1 + a^2 - j_0^2.$$

Используя две пары бозонных операторов a_i, b_i, $i = 1, 2$, и

$$J_k = \frac{1}{2} (a^* \sigma_k a + b^* \sigma_k b), \quad N_k = -\frac{1}{2} (a^* \sigma_k C b^* - a C \sigma_k b),$$

постройте эти представления (см. также гл. 19).

Теорема 2. 1° *Каждая перестановка может быть представлена в виде произведения непересекающихся циклов (однозначно с точностью до порядка множителей).*

2° *Каждая перестановка может быть представлена в виде произведения транспозиций смежных символов; для заданного* $x \in S_N$ *число транспозиций в любом разложении или всегда четно или всегда нечетно.*

Два групповых элемента x_1 и x_2 называются *сопряженными*, если существует другой групповый элемент y, такой, что $x_1 = yx_2y^{-1}$. Это соотношение является 1) рефлексивным: $x_1 = ex_1e^{-1}$, 2) симметрическим: $x_2 = y^{-1}x_1y$, и 3) транзитивным: если $x_1 = yx_2y^{-1}$ и $x_2 = zx_3z^{-1}$, то $x_1 = (yz)\,x_3\,(yz)^{-1}$. Поэтому группа может быть разделена на *классы сопряженных элементов*. Единичный элемент сам составляет класс. В общем в классе имеется много элементов.

Если, например, $x_1 = (1\ 5\ 3\ 6\ 7\ 4\ 2)\,(8\ 10)$ и

$$y = \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & & \cdots & \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad x_2 = yx_1y^{-1} = (i_1\, i_5\, i_3\, i_6\, i_7\, i_1\, i_2)\,(i_8\, i_{10}).$$

Таким образом, все элементы в классе имеют одну и ту же циклическую структуру. Длины циклов характеризуются разбиениями числа N; поэтому число классов в S_N равно числу разбиений числа N.

Поскольку циклы коммутируют, мы можем упорядочить их от большего к меньшему. Таким образом, циклическая структура (разбиение) задается множеством чисел λ_i, удовлетворяющих условию

$$N = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0, \tag{3}$$

где k произвольно. Иначе, разбиения могут характеризоваться множеством неотрицательных целых чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, таких, что

$$N = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + N\alpha_N, \quad \alpha_i \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь α_k — число циклов длины k. Ясно, что $\alpha_1 \leqslant N$, $\alpha_N \leqslant 1$ и т. д.

За исключением бесконечного ряда (см., например, [694]), общей формулы для числа разбиений не существует, но имеются таблицы (см. [356]). Однако мы ответим на такой вопрос: чему равно число элементов в каждом классе группы S_N?

Пусть U — подгруппа в G. Элементы вида $\{xu \mid u \in U\} = xU$ образуют класс смежных элементов. Ясно, что классы смежных элементов xU и yU или тождественны, или не имеют общих элементов. Каждый элемент x из G лежит в некотором классе смежных элементов, именно в классе xU. Все классы смежных элементов имеют один и тот же порядок, который равен порядку подгруппы U.

Таким образом, группа разделяется на ν непересекающихся классов смежных элементов, где

$$[G:U]=\nu \equiv \text{индекс подгруппы } U \text{ в } G=\frac{\text{порядок } G}{\text{порядок } U}. \tag{5}$$

Таким образом, порядок подгруппы U (или класса смежных элементов xU) является делителем порядка группы G (теорема Лагранжа).

Делимость порядка группы G также справедлива для классов сопряженных элементов.

Теорема 3. *Порядок класса сопряженных элементов является делителем порядка группы G.*

Доказательство. Мы определяем подгруппу U_x, называемую *централизатором* элемента x из G:

$$U_x=\{y \mid yxy^{-1}=x\}. \tag{6}$$

Мы хотим знать число различных элементов, сопряженных к x. Два элемента uxu^{-1} и vxv^{-1} тождественны тогда и только тогда, когда u и v лежат в одном и том же левом смежном классе по U_x. Поэтому число различных элементов, сопряженных к x, равно числу смежных классов по U_x или индексу подгруппы U_x, который, согласно предыдущей теореме, является делителем порядка группы G.

Пример 1. Для примера вычислим порядок h_α класса сопряженных элементов группы S_N, определенного в (4). Согласно (5), достаточно вычислить порядок централизатора U_x, определенного в (6). Перестановка x циклической структуры $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ является левоинвариантной в виде $yxy^{-1}=x$ при $\prod_j \alpha_j! j^{\alpha_j}$ перестановках, так как цикл длины j остается неизменным при j циклических перестановках и, кроме того, α_j-циклы могут переставляться между собой. Таким образом,

$$h_\alpha=N!/[\alpha_1!\, 1^{\alpha_1}\alpha_2!\, 2^{\alpha_2}\cdots\alpha_N!\, N^{\alpha_N}] \tag{7}$$

и $\sum_\alpha h_\alpha=N!$.

Нормальная подгруппа N группы G полностью состоит из классов сопряженных элементов.

Пример 2. При $N\neq 4$ *знакопеременная* группа A_N (подгруппа группы S_N, состоящая из четных перестановок) является единственной собственной нормальной подгруппой в S_N; ее индекс равен двум. При $N\neq 4$ A_N *проста*, т. е. не содержит собственных нормальных подгрупп. При $N=4$ A_4 содержит собственную нормальную подгруппу V_4 (группа Клейна с четырьмя элемен-

тами). (*Замечание*: A_4 также известна как *группа тетраэдра* T, т. е. как группа вращений и отражений, которая оставляет инвариантным регулярный тетраэдр).

Б. *Свойства представлений конечных групп*

Общие определения гл. 5 естественно применимы здесь; мы не нуждаемся только в понятии непрерывности. Критерии эквивалентности и неприводимости представлений снова содержатся в двух леммах Шура. Перечислим некоторые полезные результаты на языке конечных групп.

1° Каждое представление конечной группы G эквивалентно унитарному представлению (теорема 1.1).

2° Каждое неприводимое представление конечномерно (теорема 1.3).

3° Теорема Машке: каждое неприводимое представление конечной группы вполне приводимо, т. е. является прямой суммой неприводимых представлений (теорема 1.4).

4° Пусть T^s и $T^{s'}$ — два *неприводимые* представления группы G. Тогда соответствующие матричные элементы в ортонормированном базисе удовлетворяют условию

$$\sum_{x \in G} D_{ji}^{(s)^{-1}}(x) D_{mn}^{(s')}(x) = \delta^{ss'} \delta_{im} \delta_{jn} \frac{h}{d_s}, \tag{8}$$

где d_s — размерность матрицы $D^s_{\cdot\cdot}$, h — порядок группы, а s обозначает различные неприводимые представления. Если D^s унитарно, то $D_{ji}^{s^{-1}}(x) = D_{ij}^s(x)$ (теорема 1.5).

5° Если $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — размерности неприводимых представлений, то $h = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$.

6° Число различных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов.

Таким образом, симметрическая группа S_N имеет столько неприводимых представлений, сколько существует разбиений числа N.

Поскольку произвольное представление является прямой суммой неприводимых конечномерных представлений, то каждый характер задается формулой

$$\chi(x) = \sum_s \lambda_s \chi^{(s)}(x), \quad x \in G, \tag{9}$$

где $\chi^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$ — так называемые *примитивные*, или *простые характеры* неприводимых представлений, удовлетворяющие

условию (8). Поэтому общий или *составной характер* (9) удовлетворяет условию

$$\sum_{x \in G} \overline{\chi(x)}\,\chi(x) = h \sum_s \lambda_s^2 \geqslant h. \tag{10}$$

Соотношение (10) является критерием приводимости. Критерий неприводимости такой:

$$(\chi, \chi) = h. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь правое регулярное представление группы G, определенное в теореме 1. Характер этого представления равен

$$\chi^{\mathrm{reg}}(x) = \begin{cases} h, & x = e, \\ 0, & x \neq e. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом,

$$\sum_{x \in G} \overline{\chi^{\mathrm{reg}}(x)}\,\chi^{\mathrm{reg}}(x) = h^2. \tag{13}$$

Следовательно, регулярное представление приводимо (т. е. представляется в виде (9)) и коэффициенты λ_s удовлетворяют условию

$$\sum_s (\lambda_s^{\mathrm{reg}})^2 = h. \tag{14}$$

С другой стороны, из соотношения

$$\chi^{\mathrm{reg}}(x) = \sum_s \lambda_s^{\mathrm{reg}} \chi^{(s)}(x)$$

при $x = e$ легко получаем

$$h = \sum_s \lambda_s^{\mathrm{reg}} l_s. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем $l_s = \lambda_s^{\mathrm{reg}}$ и $h = \sum_s l_s^2$. Таким образом:

7° Размерность неприводимого представления равна его кратности в регулярном представлении (теорема 2.2). Каждое неприводимое представление содержится в регулярном представлении (теорема 1.6) и

$$h = \sum_{s=1}^{f} l_s^2. \tag{16}$$

B. *Представления группы S_N*

Начнем с регулярного представления группы S_N, которое особенно полезно во многих физических ситуациях. Рассмотрим функции от N объектов $f(1\ 2\ \ldots\ N)$, например волновую функцию

системы N частиц; каждый аргумент 1, 2, ..., i, ... стоит вместо множества квантовых чисел i-й частицы. Пусть $x(12 \ldots N)$ — перестановка N объектов, $x \in S_N$. Множество $N!$ функций

$$f\{x(1\ 2 \cdots N)\} = f_\lambda(1\ 2 \cdots N), \quad x \in S_N, \tag{17}$$

образует базис регулярного представления размерности $h = N!$ В этом базисе элемент x группы представляется формулой

$$xf_{x_i} = \sum_{j=1}^{N!} D(x)_{ji} f_{x_j}, \tag{18}$$

где

$$D(x)_{ji} = \delta_{jk}, \quad \text{если} \quad xx_i = x_k. \tag{19}$$

Регулярное представление приводимо, так как, например, вполне симметрические и вполне антисимметрические функции, обозначаемые через $f(1\ 2 \ldots N)$ и $f\{1\ 2 \ldots N\}$ соответственно, образуют одномерные инвариантные подпространства при преобразованиях (1). В самом деле, из общих теорем предыдущего раздела мы знаем, что регулярное представление должно содержать каждое неприводимое представление размерности l_s l_s раз. Поскольку число неприводимых представлений (равное числу классов сопряженных элементов) дается числом разбиений числа N, то неприводимое представление, соответствующее разбиению

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad \sum \lambda_i = N, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 0,$$

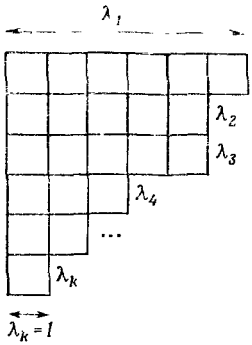
определяет множество функций определенного типа симметрии

$$f\{[1\ 2 \ldots \lambda_1][\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_1 + \lambda_2], \ldots\}, \tag{20}$$

которые вполне симметричны по первым λ_1 переменным, по следующим λ_2 переменным и т. д. Число линейно независимых функций определенного типа симметрии равно размерности соответствующего неприводимого представления. Функции заданного типа симметрии преобразуются между собой.

Это рассуждение характеризует интуитивным образом все неприводимые представления группы S_N, но его необходимо сделать более явным и точным.

Прежде всего отметим, что разбиение числа N может быть показано с помощью «таблиц Юнга». Например, разбиению $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ соответствует таблица



Существует N клеток и $N!$ способов распределения N чисел 1, 2, ..., N в эти клетки. Таблица Юнга с записанными в нее числами называется «*диаграммой Юнга*» (диаграммой Фробениуса—Юнга). Таким образом, любой таблице соответствует $N!$ диаграмм. В терминах наших функций (4) $N!$ функций, соответствующих $N!$ диаграммам, не являются линейно независимыми. Число линейно независимых функций задается числом стандартных диаграмм.

Стандартная диаграмма — это такая диаграмма, в которой числа 1, 2, ..., N в таблице Юнга на приведенном рисунке распределены возрастающим образом в каждой строке слева направо и в каждом столбце сверху вниз.

Теперь вычисление числа стандартных диаграмм $l_{(\lambda)}$, соответствующих разбиению (λ), становится комбинаторной задачей. Мы даем три таких формулы:

1. $$l_{(\lambda)} = \frac{N!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_i!} \prod_{i<k} (n_i - n_k), \tag{21}$$

где (см. рисунок)

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda_1 + (k-1), \\ n_2 &= \lambda_2 + (k-2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n_k &= \lambda_k. \end{aligned}$$

Можно проверить, что

$$\sum_{(\lambda)} l^2_{(\lambda)} = N!.$$

2. Формула Фейта [254]

$$l_{(\lambda)} = N! \det [1/(\lambda_i - i + j)!], \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{22}$$

Детерминант в (22) представляет собой детерминант $N \times N$-матрицы A с матричными элементами $a_{ij} = 1/(\lambda_i - i + j)!$. Заметим, что

$$\frac{1}{x!} = 0, \quad \text{если} \quad x < 0, \quad \text{и} \quad 1/0! = 1.$$

3. Формула Фрейма, Робинсона и Срелла [281]

$$l_{(\lambda)} = N! \Big/ \prod_{i,j} h_{ij}, \tag{23}$$

$$h_{ij} = 1 + \lambda_i + \bar{\lambda}_j - (i + j).$$

Здесь $\bar{\lambda}_j$ — число клеток в столбце j.

Мы увидим, что каждой таблице соответствует неприводимое представление группы S_N размерности $l_{(\lambda)}$.

Чтобы исследовать неприводимые представления группы S_N, рассмотрим групповую алгебру $\mathcal{A}$ как регулярное представление и разложим $\mathcal{A}$ на неприводимые части с помощью проекционных операторов (идемпотентов).

Рассмотрим диаграмму T. Пусть

$H(T)$ — множество горизонтальных перестановок, т. е. множество перестановок $p \in S_N$, которые переставляют числа в каждой строке в T, но не переставляют чисел из разных строк.

$V(T)$ — множество вертикальных перестановок, т. е. перестановок $q \in S_N$, которые переставляют числа в каждом столбце в T, но не переставляют чисел из разных столбцов.

$H(T)$ и $V(T)$ — подгруппы в S_N. Ясно, что их единственным общим элементом является единица: $H(T) \cap V(T) = I$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Величины, определенные для каждой диаграммы формулой*

$$e(T) = \sum_{\substack{p \in H(T) \\ q \in V(T)}} \varepsilon_q pq \in \mathcal{A},$$

$$\varepsilon_q = \begin{cases} +1 & \text{для четных перестановок,} \\ -1 & \text{для нечетных перестановок,} \end{cases}$$

являются в существенном идемпотентами [т. е. скалярными кратными идемпотентного элемента в $\mathcal{A}$: $e(T)^2 = (N!/l_{(\lambda)})\, e(T)$] и задают разложение алгебры $\mathcal{A}$ на неприводимые подпространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $e(T) \neq 0$ в $\mathcal{A}$. Кроме того, для $p_1 \in H(T)$ имеем соотношения

$$p_1 e(T) = \sum \varepsilon_q p_1 pq = \sum \varepsilon_q p' q = e(T),$$

и подобным образом для $q_1 \in V(T)$ $e(T)\, q_1 = \varepsilon_{q_1} e(T)$. Образуем идеал $\mathcal{A}e(T)$. Мы покажем, что все эти левые идеалы минимальны

что идеалы, соответствующие разным диаграммам, но одной и той же схеме, эквивалентны (изоморфны) и что идеалы, соответствующие различным схемам, неэквивалентны.

Рассмотрим две диаграммы T и T', соответствующие заданной схеме. Запишем $T' = gT$, где $g \in S_N$ — перестановка, которая переводит цифры из T в цифры из T', т. е. если число α находится в положении (i, j) в T, то $g\alpha$ находится в положении (i, j) в $T' = gT$. Для этих двух диаграмм $e(T)$, $e(T')$, $H(T)$, $H(T')$ связаны соотношениями

$$e(T') = ge(T)g^{-1} = e(gT).$$
$$H(T') = gH(T)g^{-1} = H(gT),$$
$$V(T') = gV(T)g^{-1} = V(gT).$$

Если $p \in H(T)$, то p переставляет строки в T, а gpg^{-1} переставляет строки в T', и т. д. Рассмотрим теперь соответствующие идеалы $\mathcal{A}e(T)$ и $\mathcal{A}e(T')$:

$$\mathcal{A}e(T') = \mathcal{A}ge(T)g^{-1} = \mathcal{A}e(T)g^{-1}.$$

Два идеала связаны друг с другом правым умножением. Поэтому они эквивалентны.

Рассмотрим теперь две разные схемы, соответствующие разбиениям $(n_1n_2 \ldots n_k)$ и $(n_1'n_2' \ldots n_n')$ соответственно. Если на первом месте, где размещение различается, $n_i > n_i'$, то мы пишем $(n_1n_2 \ldots n_k) > (n_1'n_2' \ldots n_n')$. Для двух таких диаграмм, соответствующих двум таким схемам, имеем

$$e(T_1)e'(T_2) = 0.$$

Чтобы показать это, заметим, что должны существовать два символа α и β, которые расположены в одной строке в T и в одном столбце в T' (иначе подходящими перестановками можно было бы показать, что $n_1 = n_1'$, $n_2 = n_2'$, ...). Пусть h — перестановка, переставляющая α и β. Тогда $h \in H(T_1)$ и $h \in V(T_2)$. Поэтому

$$e(T_2)e(T_1) = e(T_2')hhe(T_1) = -e(T_2')e(T_1).$$

Здесь мы использовали свойство $e(T)q = \varepsilon_q q$. Поэтому

$$e(T_1)e'(T_2) = 0.$$

Дальше покажем идемпотентный характер величины $e(T)$. Для любого числа α имеем $p\alpha e(T)q = \varepsilon_q \alpha e(T)$. Обратно, пусть $a \in \mathcal{A}$, такое, что для всех $p \in H(T)$ и $q \in V(T)$ $paq = \varepsilon_q a$. Тогда существует число α, такое, что $a = \alpha e(T)$. Чтобы убедиться в этом, положим $a = \sum \alpha(x)x$, $x \in S_N$. Тогда

$$a = \varepsilon_q p^{-1}aq^{-1} = \varepsilon_q \sum_x \alpha(x)(p^{-1}xq^{-1}) = \varepsilon_q \sum_y \alpha(pyq)y.$$

Таким образом,

$$\alpha(y) = \varepsilon_q \alpha(pxq) \quad \text{при} \quad p \in H(T), \quad q \in V(T).$$

Положив $y = 1$, получим $\alpha(1) = \varepsilon_q \alpha(pq)$. Чтобы завершить доказательство, мы должны показать, что $\alpha(x) = 0$, если x не представляется в виде pq, $p \in H(T)$, $q \in V(T)$. Это в самом деле выполняется: если x не представляется в виде pq, то должны существовать символы, расположенные в одной строке в T и в одном столбце в $T' = xT$. Пусть h — перестановка α и β. Тогда $h \in H(T)$ и $h \in V(xT)$, и поэтому $h = xqx^{-1}$ при некотором $q \in V(T)$ и

$$\alpha(x) = \varepsilon_{q^{-1}} \alpha(hyq^{-1}) = \varepsilon_{q^{-1}} \alpha(x) = -\alpha(x).$$

Следовательно, $\alpha(x) = 0$, если x не представляется в виде pq. Теперь рассмотрим

$$pe(T)^2 q = pe(T)\, e(T)\, q = \varepsilon_q e(T)^2.$$

По предыдущему результату $e(T)^2 = \alpha e(T)$. Чтобы вычислить α, рассмотрим отображение $T(a) = ae(T)$, $a \in \mathcal{A}$, и матричную форму для T в базисе, состоящем из групповых элементов $x_1 = 1$, x_2, x_3, ..., x_N. Тогда если

$$e(T) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots,$$

то

$$x_1 e(T) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 (x_1 x_2) + \ldots,$$
$$x_2 e(T) = \alpha_1 (x_2 x_1) + \alpha_2 x_2 + \ldots,$$

так что $\mathrm{Tr}(T) = \alpha_1 N!$. Кроме того, так как $x_1 = 1$ оказывается в $e(T)$ с коэффициентом 1, то $\alpha_1 = 1$. Рассмотрим теперь второй базис $(y_1, \ldots, y_l, \ldots, y_N)$, такой, что $(y_1, \ldots, y_l)$ — базис для идеала $J = \mathcal{A}e(T)$. При $a_1 \in J$ $a_1 e(T) = \alpha a_1$, поэтому

$$y_1 e(T) = \alpha y_1,$$
$$y_l e(T) = \alpha y_l,$$

а в $y_{l+i} e(T)$ первые l элементов отличны от нуля, а остальные элементы равны нулю, так как

$$y_{l+i} e(T) \in \mathcal{A}e(T).$$

Теперь след (T) равен αl. Так как след инвариантен, то

$$\alpha l = N!, \quad \alpha = N!/l.$$

Таким образом, величина $u = (l/N!)\, e(T)$ является истинным идемпотентом.

Наконец, покажем, что идеал $\mathcal{A}e(T)$ минимален. Для этого достаточно показать, что $e(T)\mathcal{A}e(T)$ скалярное число, кратное $e(T)$. Но

$$pe(T)\mathcal{A}e(T)q = e(T)\mathcal{A}e(T)\varepsilon_p, \quad p \in H(T), \quad q \in V(T),$$

и по предыдущей лемме $e(T)\mathcal{A}e(T)$ кратно единице.

Если две диаграммы T_1 и T_2 принадлежат различным схемам, то, как мы знаем, $e(T_1)e(T_2) = 0$. Поэтому $e(T_2)ae(T_1) = e(T_2)ae(T_1)a^{-1}a = e(T_2)e(aT_1)a = 0$. Поэтому два идеала $\mathcal{A}e(T_1)$ и $\mathcal{A}e(T_2)$ неэквивалентны.

Резюмируя, можем сказать, что мы показали, что каждая диаграмма T, соответствующая схеме $(n_1n_2 \ldots n_k)$, определяет в существенном идемпотентный элемент $e(T) = \sum_{p,q} \varepsilon_q pq$, такой, что $\mathcal{A}e(T)$ является минимальным левым идеалом групповой алгебры $\mathcal{A}$ группы S_N и, следовательно, неприводимую компоненту регулярного представления. Кроме того, идеалы, соответствующие различным диаграммам с одной и той же схемой, изоморфны, а идеалы, соответствующие различным схемам, неизоморфны.

К сожалению, не существует общего алгоритма, который давал бы минимальные идеалы групповой алгебры для любой конечной группы, как в случае группы S_N. Кажется, что это неразрешимая задача.

§ 6. Комментарии и дополнения

1. В доказательствах большинства теорем этой главы мы явно использовали конечность группового объема $V = \int_G dx$. Поэтому мы не можем ожидать, что эти теоремы могут быть прямо распространены на некомпактные группы, для которых $V = \infty$. Однако обобщение некоторых теорем (в частности теоремы Петера—Вейля) на некомпактные группы возможно (см. гл. 14, § 2).

2. Функции $D^s_{pq}(x)$ играют особую роль в теории представлений компактных групп и их приложениях. К сожалению, эти функции явно известны только для некоторых случаев: SO (3) (см. упражнение 5.8.1.1), SO (4) (см. упражнение 7.1.2), U (3). Гельфанд и Граев вывели рекурсивные формулы для функций D для U (n). См. также работу Лезнова и Федосеева [516].

3. Можно показать, что для простых групп Ли функции $D^s_{pq}(x)$ являются собственными функциями максимального множества коммутирующих операторов обертывающей алгебры. (Общее доказательство этого утверждения для компактных и некомпактных групп см. в гл. 14, § 2.) Это свойство является отправной точкой в явном вычислении $D^s_{pq}(x)$ для отдельных групп.