Наконец, покажем, что идеал $\mathcal{A}e(T)$ минимален. Для этого достаточно показать, что $e(T)\mathcal{A}e(T)$ скалярное число, кратное $e(T)$. Но

$$pe(T)\mathcal{A}e(T)q = e(T)\mathcal{A}e(T)\varepsilon_p, \quad p \in H(T), \quad q \in V(T),$$

и по предыдущей лемме $e(T)\mathcal{A}e(T)$ кратно единице.

Если две диаграммы T_1 и T_2 принадлежат различным схемам, то, как мы знаем, $e(T_1)e(T_2) = 0$. Поэтому $e(T_2)ae(T_1) = e(T_2)ae(T_1)a^{-1}a = e(T_2)e(aT_1)a = 0$. Поэтому два идеала $\mathcal{A}e(T_1)$ и $\mathcal{A}e(T_2)$ неэквивалентны.

Резюмируя, можем сказать, что мы показали, что каждая диаграмма T, соответствующая схеме $(n_1n_2 \ldots n_k)$, определяет в существенном идемпотентный элемент $e(T) = \sum_{p,q} \varepsilon_q pq$, такой, что $\mathcal{A}e(T)$ является минимальным левым идеалом групповой алгебры $\mathcal{A}$ группы S_N и, следовательно, неприводимую компоненту регулярного представления. Кроме того, идеалы, соответствующие различным диаграммам с одной и той же схемой, изоморфны, а идеалы, соответствующие различным схемам, неизоморфны.

К сожалению, не существует общего алгоритма, который давал бы минимальные идеалы групповой алгебры для любой конечной группы, как в случае группы S_N. Кажется, что это неразрешимая задача.

§ 6. Комментарии и дополнения

1. В доказательствах большинства теорем этой главы мы явно использовали конечность группового объема $V = \int_G dx$. Поэтому мы не можем ожидать, что эти теоремы могут быть прямо распространены на некомпактные группы, для которых $V = \infty$. Однако обобщение некоторых теорем (в частности теоремы Петера—Вейля) на некомпактные группы возможно (см. гл. 14, § 2).

2. Функции $D^s_{pq}(x)$ играют особую роль в теории представлений компактных групп и их приложениях. К сожалению, эти функции явно известны только для некоторых случаев: SO (3) (см. упражнение 5.8.1.1), SO (4) (см. упражнение 7.1.2), U (3). Гельфанд и Граев вывели рекурсивные формулы для функций D для U (n). См. также работу Лезнова и Федосеева [516].

3. Можно показать, что для простых групп Ли функции $D^s_{pq}(x)$ являются собственными функциями максимального множества коммутирующих операторов обертывающей алгебры. (Общее доказательство этого утверждения для компактных и некомпактных групп см. в гл. 14, § 2.) Это свойство является отправной точкой в явном вычислении $D^s_{pq}(x)$ для отдельных групп.

4. Теорема 1.3 была впервые доказана Гуревичем [357]. Здесь мы следовали изящному доказательству Нахбина [612] (см. также [479]). Проективные операторы для конечных и компактных групп обширно использовались Вигнером [854]. Он впервые показал эффективность этой техники в решении ряда задач квантовой механики.

Интересно, что теория проективных операторов может быть распространена на некомпактные группы (см. гл. 14, § 5).

Первое явное вычисление коэффициентов К—Г восходит к Вигнеру. Он вывел формулу (4.10) для группы SO (3).

В вычислении весов изоспиновых состояний мы следовали работе Церулуса [178]. Он также вычислил другие частные случаи формулы (4.18). Недавно были рассмотрены более общие формулы, в которых проведено суммирование по всем возможным конечным состояниям (см. [720]).

Таблица 1

Все конечные группы до порядка 15

Порядок	Группы
1	Z_1
2	$Z_2 \sim S_2$
3	Z_3
4	Z_4, $Z_2 \times Z_2 \sim D_2$
5	Z_5
6	$Z_6 \sim Z_2 \times Z_3$, $S_3 \sim D_3$
7	Z_7
8	Z_8, D_4, $Z_4 \times Z_2$, Q, $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$
9	Z_9, $Z_3 \times Z_3$
10	$Z_{10} \sim Z_2 \times Z_5$, D_5
11	Z_{11}
12	$Z_{12} \sim Z_3 \times Z_4$, $Z_2 \times Z_6 \sim Z_2 \times Z_2 \times Z_3$, $D_6 \sim Z_2 \times D_3$
	A_4, $\langle 2, 2, 3 \rangle$
13	Z_{13}
14	$Z_{14} \sim Z_2 \times Z_7$, D_7
15	$Z_{15} \sim Z_3 \times Z_5$

5. В табл. 1 мы даем все конечные группы до порядка 15. Относительно этой таблицы отметим следующее:

1) A_n — циклическая группа порядка n. Если n — простое число, то существует только одна группа, именно циклическая группа.

2) Если p и q — простые одно относительно другого, то $Z_{pq} \sim Z_p \times Z_q$ (изоморфно прямому произведению).

3) D_n — группа диэдра порядка $2n$ (группа преобразований, отображающая регулярный n-угольник в себя, которая состоит

из n вращений на угол $2\pi r/n$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, и отражения плоскости с вращением на $2\pi r/n$). D_n порождается двумя элементами x и y, удовлетворяющими соотношениям

$$x^2 = e, \quad y^n = e, \quad (xy)^2 = e.$$

4) $\langle 2, 2, m\rangle$ — двухциклическая группа порядка $4m$. Она порождается двумя элементами x, y, удовлетворяющими соотношениям [1])

$$x^4 = e, \quad x^2 = y^m, \quad yx = xy^{-1}.$$

6. Мы рассмотрели в этой главе только сильно непрерывные представления. Однако оказывается, что компактные группы имеют интересные разрывные представления. Приведем две теоремы, которые прекрасно иллюстрируют эту проблему.

Теорема 1. *Унитарное представление связной компактной полупростой группы Ли в конечномерном гильбертовом пространстве обязательно непрерывно.*

(Доказательство см. в [823].)

Ясно, что в силу рассмотренной в гл. 3, § 8, структуры компактных групп эта теорема несправедлива для некомпактных групп.

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная топологическая группа, каждое неприводимое унитарное представление в гильбертовом пространстве которой непрерывно. Тогда G дискретна.*

(Доказательство см. в [1151].)

Теорема 2 предполагает, что каждая связная компактная полупростая группа Ли должна допускать разрывные бесконечномерные неприводимые унитарные представления в гильбертовом пространстве. Интересно, что в случае группы вращений такие представления имеют важное физическое значение.

§ 7. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что матричные элементы неприводимых представлений группы SO (4) имеют вид

$$D^{J_1, J_2}_{M_1M_1', M_2M_2'}(\varphi, \theta, \psi, \alpha, \beta, \gamma) = D^{J_1}_{M_1M_1'}(\varphi, \theta, \psi)\, D^{J_2}_{M_2M_2'}(\alpha, \beta, \gamma),$$

где функции $D^J_{MM'}$ задаются формулой (5.8.1).

Указание. Используйте изоморфизм so (4) $\sim$ so (3) $\oplus$ so (3), данный в табл. 1.5.1.

---

[1]) Кокстер и Мозер [199] дали большие классы групп, порождаемых соотношениями этого типа.