

из  $n$  вращений на угол  $2\pi r/n$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , и отражения плоскости с вращением на  $2\pi r/n$ ).  $D_n$  порождается двумя элементами  $x$  и  $y$ , удовлетворяющими соотношениям

$$x^2 = e, \quad y^n = e, \quad (xy)^2 = e.$$

4)  $\langle 2, 2, m \rangle$  — двухциклическая группа порядка  $4m$ . Она порождается двумя элементами  $x$ ,  $y$ , удовлетворяющими соотношениям<sup>1)</sup>

$$x^4 = e, \quad x^2 = y^m, \quad yx = xy^{-1}.$$

6. Мы рассмотрели в этой главе только сильно непрерывные представления. Однако оказывается, что компактные группы имеют интересные разрывные представления. Приведем две теоремы, которые прекрасно иллюстрируют эту проблему.

**ТЕОРЕМА 1.** Унитарное представление связной компактной полупростой группы Ли в конечномерном гильбертовом пространстве обязательно непрерывно.

(Доказательство см. в [823].)

Ясно, что в силу рассмотренной в гл. 3, § 8, структуры компактных групп эта теорема несправедлива для некомпактных групп.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $G$  — локально компактная топологическая группа, каждое неприводимое унитарное представление в гильбертовом пространстве которой непрерывно. Тогда  $G$  дискретна.

(Доказательство см. в [115].)

Теорема 2 предполагает, что каждая связная компактная полупростая группа Ли должна допускать разрывные бесконечномерные неприводимые унитарные представления в гильбертовом пространстве. Интересно, что в случае группы вращений такие представления имеют важное физическое значение.

## § 7. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что матричные элементы неприводимых представлений группы  $SO(4)$  имеют вид

$$D_{M_1 M'_1, M_2 M'_2}^{J_1, J_2}(\varphi, \theta, \psi, \alpha, \beta, \gamma) = D_{M_1 M'_1}^{J_1}(\varphi, 0, \psi) D_{M_2 M'_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma),$$

где функции  $D_{MM'}^{J}$  задаются формулой (5.8.1).

*Указание.* Используйте изоморфизм  $so(4) \sim so(3) \oplus so(3)$ , данный в табл. 1.5.1.

<sup>1)</sup> Констлер и Мозер [199] дали большие классы групп, порождаемых соотношениями этого типа.

§ 3.1. Пусть  $T^{\lambda_1}$  и  $T^{\lambda_2}$  — неприводимые представления группы  $\text{SO}(3)$ . Выведите следующее соотношение для матричных элементов:

$$D_{m_1 m'_1}^{\lambda_1}(g) D_{m_2 m'_2}^{\lambda_2}(g) = \sum_{\lambda=|\lambda_1-\lambda_2|}^{\lambda_1+\lambda_2} \langle \lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda m \rangle D_{mm'}^{\lambda}(g) \times \\ \times \langle \lambda_1 \lambda_2 \lambda m' | \lambda_1 m'_1 \lambda_2 m'_2 \rangle.$$

*Указание.* Найдите матричные элементы операторного равенства (5.8.3).

§ 4.1. Покажите, что ряд Клебша—Гордана (5.8.3) для  $\text{SO}(3)$  предполагает следующее соотношение для матричных элементов:

$$D_{M_1 M'_1}^{J_1}(g) D_{M_2 M'_2}^{J_2}(g) = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 J_2 JM \rangle \times \\ \times D_{M_1+M_2, M'_1+M'_2}^J(g) \langle J_1 J_2 JM' | J_1 M'_1 J_2 M'_2 \rangle.$$

*Указание.* Используйте формулу (5.8.3) и соотношение полноты для состояний  $| J_1 J_2 JM \rangle$ .

§ 5.1. Покажите, что  $S_N$  может быть порождена двумя элементами  $x = (1\ 2)$  и  $y = (1\ 2\ \dots\ N)$ .

*Указание.* Любая перестановка может быть записана в виде произведения циклов. Любой цикл имеет вид

$$(i_1 i_2 \cdots i_p) = (i_1 i_2) (i_2 i_3) \cdots (i_{p-1} i_p).$$

Любая транспозиция имеет вид

$$(i, j+1) = (j, j+1) (ij) (j, j+1)^{-1}.$$

Тогда  $y^n x (y^n)^{-1}$  дает все транспозиции вида  $(i, j+1)$ .

§ 5.2. Найдите таблицу умножения, а также 2-мерное и 3-мерное представления группы  $D_3 \sim S_3$ . Найдите нормальные подгруппы и классы сопряженных элементов.

§ 5.3. Покажите, что матрицы Паули  $\pm I$ ,  $\pm \sigma_1$ ,  $\pm \sigma_2$ ,  $\pm \sigma_3$  представляют собой реализацию кватернионной группы  $Q = \langle 2, 2, 2 \rangle$  (см. табл. 7.1).

§ 5.4. Рассмотрим  $S_3$ . Существует три схемы Юнга:



Соответствующие существенные идемпотенты имеют вид

$$e_1 = \sum_{x \in G} x,$$

$$e_2^{(1)} = I + (1\ 2) - (1\ 3) - (3\ 2),$$

$$e_2^{(2)} = I + (1\ 3) - (1\ 2) - (1\ 3\ 2),$$

$$e_3 = \sum_x \varepsilon(x) x.$$

Рассмотрите свойства идемпотентов, минимальные левые идеалы и двусторонние идеалы, которые ими порождаются, и соответствующие неприводимые представления.

§ 5.5. Если  $x, y, z$  — три тождественных объекта, то покажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(x + y + z) \text{ и } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(2x - y - z) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(y - z) \end{pmatrix}$$

по 1-мерному и 2-мерному представлениям соответственно группы перестановок  $S_3$ .

§ 5.6. Покажите, что матрицы Дирака, определенные формулой

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

порождают (относительно матричного умножения) конечную группу порядка  $h = 32$ , что она имеет 17 классов сопряженных элементов, а следовательно, 17 неприводимых представлений, 16 из которых одномерны, а одно четырехмерно.