Глава 8

Конечномерные представления групп Ли

В этой главе излагается теория конечномерных неприводимых представлений произвольной связной группы Ли в глобальной форме. Глобальный подход вносит значительные упрощения в теорию по сравнению с инфинитезимальным подходом Картана—Вейля; он дает классификацию конечномерных неприводимых представлений на языке старших весов и одновременно простую каноническую реализацию пространства представления посредством полиномов от нескольких комплексных переменных. В свою очередь это делает возможным решение различных практических задач, таких как сужение представления заданной группы на подгруппу, разложение тензорного произведения, явное вычисление «коэффициентов Клебша—Гордана» и тому подобное.

В § 1 обсуждаются общие свойства представлений разрешимых и полупростых групп Ли. В частности, дается общий вывод знаменитых теорем Ли и Вейля.

В § 2 излагается техника индуцированных конечномерных представлений групп Ли и доказывается основная теорема о том, что всякое конечномерное неприводимое представление группы Ли G, допускающей разложение Гаусса, является представлением, которое индуцировано одномерным представлением некоторой подгруппы.

В § 3—6 развивается глобальная теория представлений комплексных и вещественных групп Ли.

Наконец, в § 7 рассматривается классификация конечномерных неприводимых представлений произвольных связных групп Ли. Метод основан на использовании разложения Леви—Мальцева группы G и свойств неприводимых представлений разрешимых и полупростых групп.

В этой главе для простоты мы будем часто опускать термин «конечномерный», поскольку будем иметь дело здесь исключительно с конечномерными представлениями.

§ 1. Общие свойства представлений разрешимых и полупростых групп Ли

Теория представлений групп Ли основана на существовании для каждой комплексной или вещественной группы Ли характеристической разрешимой связной подгруппы. Явный вид этой

подгруппы определяется разложениями Леви—Мальцева, Гаусса или Ивасавы. Прежде всего доказывается фундаментальная теорема Ли о представлениях разрешимых групп. Эта теорема является ключом к классификации неприводимых конечномерных представлений произвольных групп Ли. Мы даем глобальную версию теоремы Ли, удобную в теории индуцированных представлений.

А. *Теория представлений разрешимых групп*

Пусть N — разрешимая топологическая группа. Пусть $Q(N)$ — ее коммутаторная подгруппа, т. е. замыкание в топологии группы G множества, порожденного элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$. Положим $Q_i(N) = Q(Q_{i-1}(N))$. Поскольку N разрешима, имеем $Q_p(N) = \{e\}$ при некотором p; наименьшее p называется *высотой* группы N. Легко видеть, что если N — связная разрешимая группа, то $Q(N)$ также связна и разрешима.

Теорема 1 (Ли). *Всякое конечномерное неприводимое представление связной топологической разрешимой группы N одномерно.*

Доказательство. Доказываем теорему по индукции. Если N имеет высоту единица (т. е. N абелева), то утверждение теоремы следует из леммы Шура 5.3.5. Предположим, что N имеет высоту p и теорема доказана для групп высоты $p-1$. Пусть $n \to T_n$ — конечномерное неприводимое представление N в векторном пространстве H. Подгруппа $Z = Q(N)$ имеет высоту $p-1$. Значит, представление $z \to T_z$ подгруппы $Z = Q(N)$ содержит одномерное представление группы Z. Следовательно, мы можем найти комплексный характер $z \to \chi(z)$ и ненулевой вектор u_χ в H, такие, что

$$T_z u_\chi = \chi(z)\, u_\chi \tag{1}$$

для каждого z в Z. Обозначим через Φ множество характеров χ группы Z, таких, что (1) имеет ненулевое решение u_χ в H. Ясно, что Φ — конечное множество. Поскольку Z инвариантна в N, мы можем для всякого характера χ группы Z и всякого $n \in N$ определить новый характер χ_n, заданный формулой

$$\chi_n(z) \equiv \chi(n^{-1} z n). \tag{2}$$

Равенство (1) предполагает, что

$$T_z T_n u_\chi = T_n T_n^{-1} T_z T_n u_\chi = \chi_n(z)\, T_n u_\chi. \tag{3}$$

Следовательно, $\chi \in \Phi$ влечет $\chi_n \in \Phi$ для всякого $n \in N$. Введем теперь следующую топологию в Φ: $\chi \to \chi'$, если $\chi(z) \to \chi'(z)$ для всякого z. В этой топологии Φ является дискретным пространством. Непрерывность группового умножения означает, что для

заданного χ характер χ_n зависит непрерывно от $n \in N$. С другой стороны, связность группы N означает, что для каждого χ из Φ множество всех χ_n связно. Поскольку это множество также конечно, мы получаем, что $\chi_n = \chi$ для всякого $\chi \in \Phi$ и всякого $n \in N$. Таким образом, заключаем, что если $\chi \in \Phi$, то на векторы u_χ, удовлетворяющие равенству (1), натягивается подпространство в H, инвариантное относительно T_n. Так как H неприводимо относительно T_n, заключаем, что для всякого $z \in Z$

$$T_z = \chi(z) \cdot I. \tag{4}$$

Иногда Φ содержит только один характер подгруппы Z.

Пусть n_0 — произвольный элемент из N, и пусть c — любой корень полинома $x \to \det(T_{n_0} - xI)$. Поскольку T_{n_0} не вырождено, c не может быть нулем. Значит, в H существует ненулевой u_0, такой, что

$$T_{n_0} u_0 = c u_0. \tag{5}$$

Поскольку $n_0 n n_0^{-1} n^{-1} \in Z$, равенство (4) означает, что

$$T_{n_0} T_n = \chi\left(n_0 n n_0^{-1} n^{-1}\right) T_n T_{n_0}.$$

Отсюда и из (5) получаем

$$T_{n_0} T_n u_0 = c\chi\left(n_0 n n_0^{-1} n^{-1}\right) T_n u_0.$$

Значит, для всякого $n \in N$ $T_n u_0$ является собственным вектором для T_{n_0}. Соответствующее собственное значение $c \cdot \chi(n_0 n n_0^{-1} n^{-1})$ непрерывно зависит от n и имеет лишь конечное число возможных значений. Следовательно, связность N означает, что χ не зависит от n. Полагая $n = n_0$, получаем $\chi(n_0 n n_0^{-1} n^{-1}) = 1$. Таким образом,

$$T_{n_0} T_n u_0 = c T_n u_0.$$

Поэтому линейное подпространство $\{u_0 \in H;\ T_{n_0} u_0 = c u_0\}$ инвариантно по отношению ко всем T_n. Следовательно, оно должно совпадать с H. Это, в свою очередь, ввиду леммы Шура означает, что T_{n_0} сводится к скаляру cI для всякого $n_0 \in N$. Следовательно, в силу неприводимости T_{n_0} получаем утверждение теоремы Ли.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В любом пространстве представления связной разрешимой группы N существует ненулевой вектор и ненулевая непрерывная мультипликативная функция $\chi(n)$, такие, что*

$$T_n u_\chi = \chi(n) u_\chi \text{ для всех } n \in N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно выделить неприводимое подпространство и применить теорему Ли.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякое представление связной разрешимой группы N можно свести к треугольному виду*

$$T_n = \begin{bmatrix} \chi^1(n) & & & 0 \\ & \chi^2(n) & & \\ & & \cdot & \\ * & & & \chi^N(n) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование собственного вектора для всех T_n эквивалентно приводимости матриц T_n, т. е.

$$T_n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{T}_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * \ \cdots \ * & \chi^N(n) \end{array}\right].$$

Матрицы $\tilde{T}_n$ снова образуют представление группы N. Таким образом, последовательное применение этой формы дает (6).

Заметим, что многие важные группы из рассматриваемых в физике разрешимы; например, группа Пуанкаре $\Pi_2 = T^{(1,1)} \rtimes SO(1, 1)$ в двумерном пространстве-времени и группа Гейзенберга, ассоциированная с коммутационными соотношениями

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0 \quad (\text{или } [a, a^*] = 1),$$

являются разрешимыми группами высоты 2. Действительно, например, групповое умножение в Π_2 означает, что $Q_1(\Pi_2) = T^{(1,1)}$, $Q_2(\Pi_2) = \{e\}$. Поскольку эти группы связны, из теоремы Ли имеем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Всякое конечномерное неприводимое представление группы Пуанкаре Π_2 и группы Гейзенберга одномерно.*

Таким образом, группы движения одно- и двумерного пространства-времени Минковского и евклидова пространства-времени должны быть разрешимыми.

Б. *Теория представлений полупростых групп Ли*

Связная простая группа Ли имеет только тривиальное одномерное представление $g \to I$. Действительно, связная простая группа может иметь лишь два типа инвариантных подгрупп: G_1 — дискретный центр группы G (или его подгруппу) и $G_2 = G$. Если гомоморфизм $g \to T_g$ имеет в качестве ядра G_1, то T_g является точным представлением для G/G_1. Следовательно, оно не может быть одномерным, поскольку G/G_1 некоммутативна: если ядром является G_2, то T_g — тождественное представление.

Поскольку полупростые связные группы Ли являются прямыми произведениями инвариантных простых связных подгрупп, эти группы также имеют только тривиальное одномерное представление.

Докажем теперь интересное свойство представлений простых групп Ли.

Теорема 2. *Связная простая некомпактная группа Ли G не допускает конечномерных унитарных представлений, за исключением тривиального.*

Доказательство. Предположим сначала, что ядро отображения $g \to T_g$ состоит только из единицы. Тогда гомоморфизм $g \to T_g$ является точным. Следовательно, группа $\{T_g\}$ изоморфна G. Кроме того, $\{T_g\}$ связна в силу непрерывности отображения $g \to T_g$. Значит, если G допускает конечномерное, скажем n-мерное, унитарное представление, то $\{T_g\}$ является связной и простой подгруппой в $U(n)$, которая, согласно теореме 3.10, является замкнутой. Следовательно, G компактна.

Пусть теперь Z_G — центр в G. Ясно, что Z_G дискретен. Пусть $\tilde{Z}_G$ — подгруппа в Z_G, совпадающая с ядром гомоморфизма $g \to T_g$. G локально изоморфна G/Z_G. Ввиду некомпактности G формы Киллинга как для G, так и для $G/\tilde{Z}_G$, не дефинитны. Следовательно, $G/\tilde{Z}_G$ также некомпактна и удовлетворяет предположению первой части доказательства.

Эта теорема имеет важные следствия в квантовой теории. Так как представление $g \to T_g$ физической группы симметрии G должно сохранять вероятность (скалярное произведение), то T должно быть унитарным (гл. 14). С другой стороны, многие физические группы симметрии, такие как группа Лоренца SO (3, 1) или группа де Ситтера SO (4, 1), являются простыми и некомпактными. Следовательно, мы должны пользоваться бесконечномерными представлениями для описания состояний рассматриваемых физических объектов.

Замечание. Теорема 2, вообще говоря, для *полупростых* некомпактных групп не верна. Например, полупростая связная некомпактная группа Ли

$$G = \mathrm{SO}(3,\ 1) \times \mathrm{SU}(3)$$

имеет унитарное конечномерное представление:

$$(g_1,\ g_2) \to I \cdot T_{g_2}, \quad g_1 \in \mathrm{SO}(3,\ 1), \quad g_2 \in \mathrm{SU}(3).$$

Однако теорема 2 влечет за собой для полупростых групп следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Связная полупростая некомпактная группа Ли не может допускать точного унитарного конечномерного представления.*

Доказательство вытекает из разложения G на простые факторы и из теоремы 2.

Пусть теперь G — комплексная группа Ли, и пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — локальные (комплексные) координаты в G. Различаем следующие классы представлений G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. О представлении $g \to T_g$ комплексной группы G говорят, что оно *комплексно-аналитическое*, если оно аналитически зависит от параметров $t_1, \ldots, t_n$, *комплексно-антианалитическое*, если оно аналитически зависит от $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n$, и *вещественно-аналитическое*, если оно аналитически зависит от параметров $\operatorname{Re} t_1, \operatorname{Im} t_1, \ldots, \operatorname{Re} t_n, \operatorname{Im} t_n$ (или $t_1, \ldots, t_n, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n$).

ПРИМЕР 1. Пусть G — комплексная матричная группа. Тогда представление $g \to g$ аналитично, $g \to \bar{g}$ антианалитично и $g \to g \otimes \bar{g}$ вещественно.

Если $g \to T_g$ — комплексно-аналитическое неприводимое представление группы G в H, ограничение его на подгруппу N может быть, вообще говоря, приводимым. Однако если N — вещественная форма группы G (т. е. комплексное расширение N совпадает с G), то имеется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть T_G — комплексно-аналитическое представление группы G, а T_N — сужение T_G на вещественную форму N группы G. Тогда T_G неприводимо (вполне приводимо) тогда и только тогда, когда T_N неприводимо (вполне приводимо).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению каждый матричный элемент является аналитической функцией комплексных параметров $t_1, \ldots, t_n$ в G. Если некоторый матричный элемент равен нулю на G, то он, в частности, равен нулю и на N; обратно, в силу единственности аналитического продолжения, если матричный элемент равен нулю на N, то он равен нулю и на G. Это доказывает утверждение теоремы 3.

Используя «унитарный трюк Вейля» (построение представлений вещественных форм G_R заданной комплексной группы Ли G_C путем ограничения представлений группы G_C на G_R), получаем глобальные представления вещественных полупростых групп, таких как SL (n, R), SU (n), SU (p, q) и других, из представлений комплексной группы Ли GL (n, C). Поскольку структура комплексных групп более проста, чем вещественных, этим способом получается значительное упрощение теории представлений полупростых групп Ли.

Докажем теперь фундаментальную теорему Вейля о полной приводимости представлений полупростых групп Ли.

ТЕОРЕМА 4 (Вейль). *Пусть G — связная полупростая группа Ли, и пусть $g \to T_g$ — любое конечномерное представление группы G в пространстве H. Тогда*

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n, \tag{7}$$

где каждое H_i инвариантно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство заключается в сведении задачи к полной приводимости в случае компактных групп. Пусть L — алгебра Ли группы G, L^c — ее комплексное расширение и L_k^c — максимальная компактная подалгебра в L^c. Из теоремы 1.5.2 мы знаем, что L_k^c также является вещественной формой L^c, т. е. комплексное расширение алгебры L_k^c совпадает с L^c. Представление T группы G индуцирует представление $L \ni X \to T(X)$ алгебры L в H посредством линейных (матричных) преобразований. Поскольку $L^c = L + \mathrm{i}\, L$, представление $T(X)$ алгебры L задает представление T^c алгебры L^c, а также представление T_k^c алгебры L_k^c. Согласно теореме 3, алгебра Ли линейных преобразований вполне приводима тогда и только тогда, когда ее комплексификация вполне приводима. Следовательно, мы можем свести задачу доказательства полной приводимости $T(X)$ к доказательству полной приводимости T_k^c (через T^c). Пусть G_k — связанная с L_k^c компактная группа Ли. Тогда ввиду теоремы 7.1.4 мы знаем, что каждое представление G_k вполне приводимо. Значит, представление T_k^c алгебры L_k^c, а следовательно, и $T(X)$ должны быть вполне приводимыми. Взяв экспоненту от представления $T(X)$ алгебры L, что дает глобальное представление T группы G, получаем требуемую полную приводимость T.

Теорема Вейля фактически утверждает, что всякое представление полупростой группы Ли G построено из неприводимых представлений. Следовательно, задача классификации конечномерных представлений полупростых групп Ли сводится к задаче классификации всех неприводимых представлений. Эту задачу мы решаем в § 3, 4 и 5.

Обобщение теоремы Вейля на произвольные связные группы Ли дано в § 7 настоящей главы.

§ 2. Индуцированные представления групп Ли

Как видно из утверждения 7.1.6, каждое конечномерное неприводимое представление компактной группы входит в регулярное представление. Покажем теперь, что всякое непрерывное неприводимое представление $g \to T_g$ произвольной топологиче-