Докажем теперь фундаментальную теорему Вейля о полной приводимости представлений полупростых групп Ли.

ТЕОРЕМА 4 (Вейль). *Пусть G — связная полупростая группа Ли, и пусть $g \to T_g$ — любое конечномерное представление группы G в пространстве H. Тогда*

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n, \tag{7}$$

где каждое H_i инвариантно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство заключается в сведении задачи к полной приводимости в случае компактных групп. Пусть L — алгебра Ли группы G, L^c — ее комплексное расширение и L_k^c — максимальная компактная подалгебра в L^c. Из теоремы 1.5.2 мы знаем, что L_k^c также является вещественной формой L^c, т. е. комплексное расширение алгебры L_k^c совпадает с L^c. Представление T группы G индуцирует представление $L \ni X \to T(X)$ алгебры L в H посредством линейных (матричных) преобразований. Поскольку $L^c = L + \mathrm{i}\, L$, представление $T(X)$ алгебры L задает представление T^c алгебры L^c, а также представление T_k^c алгебры L_k^c. Согласно теореме 3, алгебра Ли линейных преобразований вполне приводима тогда и только тогда, когда ее комплексификация вполне приводима. Следовательно, мы можем свести задачу доказательства полной приводимости $T(X)$ к доказательству полной приводимости T_k^c (через T^c). Пусть G_k — связанная с L_k^c компактная группа Ли. Тогда ввиду теоремы 7.1.4 мы знаем, что каждое представление G_k вполне приводимо. Значит, представление T_k^c алгебры L_k^c, а следовательно, и $T(X)$ должны быть вполне приводимыми. Взяв экспоненту от представления $T(X)$ алгебры L, что дает глобальное представление T группы G, получаем требуемую полную приводимость T.

Теорема Вейля фактически утверждает, что всякое представление полупростой группы Ли G построено из неприводимых представлений. Следовательно, задача классификации конечномерных представлений полупростых групп Ли сводится к задаче классификации всех неприводимых представлений. Эту задачу мы решаем в § 3, 4 и 5.

Обобщение теоремы Вейля на произвольные связные группы Ли дано в § 7 настоящей главы.

§ 2. Индуцированные представления групп Ли

Как видно из утверждения 7.1.6, каждое конечномерное неприводимое представление компактной группы входит в регулярное представление. Покажем теперь, что всякое непрерывное неприводимое представление $g \to T_g$ произвольной топологиче-

ской группы G может быть вложено в регулярное представление, реализованное в пространстве $C(G)$. Действительно, пусть H — пространство представления T, и пусть $\widehat{H}$ — сопряженное пространство. Возьмем фиксированный элемент $0 \neq v \in \widehat{H}$ и положим

$$f_u(g) = \langle T_g u, v\rangle, \quad u \in H.$$

Множество полученных таким образом функций образует линейное подпространство $\widetilde{H} \subset C(G)$. Отображение V: $H \to \widetilde{H}$ является взаимно однозначным, так как прообраз нуля пространства H является инвариантным подпространством, которое не может отличаться от нуля, поскольку H неприводимо. При отображении V функция $f_u(gg_0)$ соответствует вектору $T_{g_0}u$, т. е. G представлена в $\widetilde{H}$ посредством правых сдвигов $T^R_{g_0}$. В пространстве $\widetilde{H}$ можно выбрать базис, состоящий из функций

$$e_i(g) = D_{1i}(g), \quad i = 1, 2, \ldots, \dim H, \tag{1}$$

где $D_{ij}(g)$ — матричные элементы представления T_g. Тогда

$$T^R_{g_0} e_i(g) = e_i(gg_0) = D_{1i}(gg_0) = D_{1k}(g) D_{ki}(g_0) = D_{ki}(g_0) e_k(g).$$

Таким образом, пространство $\widetilde{H}$, натянутое на непрерывные функции $e_i(g)$, $i = 1, 2, \ldots, \dim H$, на группе G, может быть взято в качестве пространства заданного неприводимого представления $g \to T_g$ группы G.

Изложим теперь основанный на обобщении этой идеи метод построения индуцированных конечномерных представлений комплексных классических групп Ли. Начнем с построения пространства представления.

Представления группы G, индуцированные[1]) *представлением L подгруппы K*

Пусть K — замкнутая подгруппа в G, и пусть $k \to L_k$ — конечномерное представление K в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим линейное пространство $\widetilde{H}^L$ функций u с областью определения в G, множеством значений в H, удовлетворяющих следующим условиям:

1° Скалярное произведение $(u(g), v)_H$ непрерывно в G при произвольном $v \in H$. (2)

2° $u(kg) = L_k u(g)$ для всех $k \in K$.

Определим

$$T^L_{g_0} u(g) = u(gg_0). \tag{3}$$

---

[1]) Индуцированные представления, в особенности бесконечномерные, более подробно рассматриваются в гл. 16.

Функция $u(gg_0)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° и поэтому принадлежит $\widetilde{H}^L$. Кроме того, имеем

$$(T^L_{g_1}T^L_{g_2}u)(g) = u(gg_1g_2) = T^L_{g_1g_2}u(g).$$

Следовательно,

$$T^L_{g_1}T^L_{g_2} = T^L_{g_1g_2} \quad \text{и} \quad T^L_e = I.$$

В силу условия (2) 1° отображение $g \to T^L_g$ непрерывно. Значит, отображение $g \to T^L_g$ задает непрерывное, вообще говоря, бесконечномерное представление группы G.

Отображение $g \to T^L_g$ называется *представлением группы* G, *индуцированным представлением* L *подгруппы* K.

Реализация индуцированного представления $g \to T^L_g$ группы G при помощи правого регулярного представления стирает индивидуальность данного представления. В связи с этим дадим другую реализацию T^L в линейном пространстве $H^L(Z)$ функций в $Z = K \backslash G$.

Пусть G — классическая группа Ли, допускающая разложение Гаусса вида

$$G = \mathfrak{Z}DZ, \tag{4}$$

где D — абелева замкнутая подгруппа в G, $\mathfrak{Z}D$ и DZ — разрешимые связные подгруппы в G, коммутаторными подгруппами которых являются $\mathfrak{Z}$ и Z соответственно, и

$$\mathfrak{Z} \cap DZ = \{e\}, \quad D \cap Z = \{e\}.$$

Пусть $K = \mathfrak{Z}D$, и пусть $k \to L_k$ — одномерное представление K. Поскольку $\mathfrak{Z}$ — коммутаторная подгруппа в K, представление $k \to L_k$ тривиально на $\mathfrak{Z}$, т. е. $L_\zeta = I$. Следовательно, отображение

$$\mathfrak{Z}D \ni k = \zeta\delta \to IL_\delta \tag{5}$$

задает фактически одномерное представление подгруппы D. Если $\widetilde{H}^L$ — пространство функций, удовлетворяющих условиям (2) с L_δ, заданным согласно (5), то из соотношений (4) и (5) следует, что для $u(g) \in \widetilde{H}^L$ мы имеем

$$u(g) = u(\zeta\delta z) = L_{\zeta\delta}u(z) = L_\delta u(z), \quad z \in Z. \tag{6}$$

Поскольку L_δ фиксировано, мы можем заменить каждую функцию $u(g) \in \widetilde{H}^L$ ее контракцией $u(z)$, заданной на области Z, и рассмотреть вместо линейного пространства $\widetilde{H}^L$ на G соответствующее линейное пространство $\widetilde{H}^L(Z)$ функций с областью определения Z. Отображение $\widetilde{H}^L \to \widetilde{H}^L(Z)$ взаимно однозначно. Действительно, прообраз нуля в $\widetilde{H}^L(Z)$ есть нуль в $\widetilde{H}^L$. И если $u(z) \equiv$

$= 0$, то $u(g) = 0$ для регулярной точки g из G, которая допускает разложение $g = kz$. С другой стороны, $u(g)$ непрерывна, а $\mathfrak{Z}DZ$ плотно в G. Следовательно, $u(g) = 0$. Найдем теперь представление $g \to T_g^L$ в этой реализации пространства представления.

ЛЕММА 1. *Действие операторов T_g^L в пространстве $\tilde{H}^L(Z)$ задается формулой*

$$T_{g_0}^L u(z) = L_{\tilde{\delta}} u(z_{\tilde{g}}), \tag{7}$$

где $\tilde{\delta}$ и $z_{\tilde{g}}$ определяются из разложения Гаусса элемента $\tilde{g} = zg = \tilde{\zeta}\tilde{\delta}z_{\tilde{g}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая

$$gg_0 = kzg_0 = k\tilde{\zeta}\tilde{\delta}z_{\tilde{g}}, \tag{8}$$

получаем из соотношений (6) и (5), что вектор $T_{g_0}^L u(z)$ в $\tilde{H}^L(Z)$, соответствующий вектору $(T_{g_0}^L u)(g) = u(gg_0)$ в $\tilde{H}^L$, имеет вид

$$L_{\tilde{\delta}}^{-1} u(gg_0) = L_{\tilde{\delta}}^{-1} L_k L_{\tilde{\zeta}\tilde{\delta}} u(z_{\tilde{g}}) = L_{\tilde{\delta}} u(z_{\tilde{g}}). \tag{9}$$

Отсюда вытекает равенство (7).

Замечание. Строго говоря, векторы $u(z)$, так же как и представление в $\tilde{H}^L(Z)$, следовало бы обозначать различными символами, скажем, $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{T}_g^L$. Для простоты мы использовали один и тот же символ, так как недоразумение здесь исключено.

Следует также подчеркнуть, что представление T^L в $\tilde{H}^L(Z)$ может быть приводимым и бесконечномерным. Будем обозначать неприводимое подпространство в $\tilde{H}^L(Z)$, содержащее функцию $u_0(z) \equiv 1$, через $H^L(Z)$. Для простоты ограничение представления T^L на $H^L(Z)$ будем обозначать также символом T^L.

Равенство (7) означает далее, что

$$T_{z_0}^L u(z) = u(zz_0) \quad \text{для всех } z_0 \in Z. \tag{10}$$

$$T_\delta^L u(z) = L_\delta u(\delta^{-1} z \delta) \quad \text{для всех } \delta \in D. \tag{11}$$

Ясно, что одномерные представления L подгруппы D (а значит, и подгруппы K) задаются характерами. Если

$$D \ni \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n \end{bmatrix}, \quad \delta_i \neq 0, \tag{12}$$

то наиболее общий комплексно-аналитический характер $\delta \to L_\delta$ имеет вид

$$L^\delta = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \ldots \delta_n^{m_n}, \tag{13}$$

где m_i, $i = 1, \ldots, n$, — целые числа. Наиболее общий комплексно-антианалитический характер имеет вид

$$L_\delta = \overline{\delta_1^{m_1}}\,\overline{\delta_2^{m_2}} \ldots \overline{\delta_n^{m_n}},$$

где m_i — целые числа.

О характере L, который определяет индуцированное неприводимое конечномерное представление T^L группы G, говорят, что он *индуктивен относительно* группы G. Ниже мы докажем, что только некоторые характеры L подгруппы D могут быть индуктивными относительно G.

Следующая теорема устанавливает основной результат в теории конечномерных представлений групп Ли.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — группа Ли, допускающая разложение Гаусса $G = \mathfrak{Z}DZ$. Тогда всякое неприводимое конечномерное представление группы G является представлением T^L, индуцированным в пространстве H^L при помощи однозначно определенного характера $\delta \to L_\delta$ подгруппы D. Два неприводимых представления T^{L_1} и T^{L_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда $L^1 = L^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T — неприводимое представление G, и пусть T_K обозначает его сужение на разрешимую связную подгруппу $K = \mathfrak{Z}D$. Из следствия 2 теоремы Ли мы знаем, что все операторы T_k, $k \in K$, могут быть одновременно приведены к треугольному виду, т. е.

$$T_k = \begin{bmatrix} L_k^1 & & & 0 \\ & L_k^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & L_k^r \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $k \to L_k^i$ — характеры группы K. Далее, всякий характер группы K тривиален на коммутаторной группе $\mathfrak{Z}$ из K. Следовательно,

$$L_k^i = L_{\zeta\delta}^i = L_\delta^i.$$

Фактически L_k^i является характером группы D. Пространство H неприводимого представления T может быть натянуто на векторы

$$e_i(g) = D_{ii}(g), \tag{15}$$

где $D_{ji}(g)$ — матричные элементы представления T_g [см. соотношения (1)]. В силу (14) мы имеем

$$e_i(kg) = D_{ls}(k) D_{si}(g) = L_k^l e_i(g).$$

Поэтому всякий элемент $u(g)$ из $\widetilde{H}^L$ является непрерывной функцией на G, удовлетворяющей условию

$$u(kg) = L_k^l u(g).$$

Таким образом, условия 1° и 2° в (2) выполнены. Следовательно, T может быть реализовано как представление T^{L_1} группы G, индуцированное одномерным представлением $k \to L_k^1$ подгруппы K. Действие представления $T_g^{L^1}$ в пространстве $\widetilde{H}^{L_1}$ задается правым сдвигом (3), а в пространстве $\widetilde{H}^L(Z)$ — по формуле (7).

Применяя следствие 1 теоремы Ли для разрешимой подгруппы $N = DZ$, заключаем, что пространство $\widetilde{H}^L(Z)$ содержит общий для всех операторов T_n, $n \in N$, собственный вектор $u_0(z)$. Ясно, что этот вектор инвариантен относительно действия коммутаторной группы $Z \subset N$, т. е. $T_{z_0} u_0(z) = u_0(z)$ для всех z_0 из Z. Так как, согласно (10), подгруппа Z действует в $\widetilde{H}^L(Z)$ как правый сдвиг, фиксированный собственный для всех T_z вектор может быть только константой, т. е. $u_0(z) \equiv 1$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{H}^L$ совпадает с $\widetilde{H}^L(Z)$, и в силу равенства (11) мы получаем

$$T_\delta^{L^1} u_0(z) = L_\delta^1 u_0(z). \tag{16}$$

Следовательно, индуктивный характер L^1 однозначно определен.

Если $L^1 = L^2$, то, очевидно, T^{L^1} и T^{L^2} эквивалентны. Обратно, если T^{L^1} и T^{L^2} эквивалентны, то существует оператор V, такой, что $VT^{L^1}V^{-1} = T^{L^2}$ и $H_2 = VH_1$. Следовательно, ввиду (16) получаем $VT_\delta^{L^1}V^{-1}(Vu_0)(z) = L_\delta^1(Vu_0)(z)$; это влечет равенство $L^1 = L^2$.

Последняя часть доказательства дает следующий важный результат.

Следствие 1. *В пространстве H^L всякого неприводимого конечномерного представления группы G существует один и только один (с точностью до нормировки) инвариантный вектор $u_0(z)$ подгруппы Z, т. е.*

$$T_z^L u_0 = u_0 \quad \text{для всех } z \in Z. \tag{17}$$

Этот инвариантный вектор удовлетворяет, кроме того, условию

$$T_\delta^L u_0 = L_\delta u_0 \quad \text{для всех } \delta \in D \tag{18}$$

и может быть собственно нормализован, так что

$$u_0(z) = 1. \tag{19}$$

Характер $\delta \to L_\delta$ называют *целочисленным старшим весом* неприводимого представления T^L. Поскольку $T^L = \exp\left(\sum_k H_k \alpha_k\right)$, где H_k — генераторы представления подгруппы D, а α_n — параметры в алгебре Ли группы D, мы можем перейти к инфинитезимальным преобразованиям и с помощью равенств (18) и (13) получить

$$H_k u_0 = m_k u_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Вектор $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ называется *старшим весом* представления T^L, а вектор u_0 — *старшим вектором*. Согласно теореме 2, m определяется однозначно и в свою очередь задает неприводимое представление T^L. Старший вектор u_0, соответствующий m, будем обозначать также через u_m.

Следствие 2. *Если пространство H представления T содержит только один инвариантный вектор подгруппы Z, то T неприводимо.*

Доказательство. Всякое представление T группы G согласно теореме Вейля вполне приводимо. Значит, оно может быть приведено к блочно-диагональному виду (5.3.4) с неприводимыми представлениями D^i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Повторяя конструкцию теоремы 2 для каждого блока D^i, находим N инвариантных векторов подгруппы Z. Следовательно, в случае $N=1$ T должно быть неприводимым.

Из равенства (19), разложения Гаусса и закона композиции для операторов T_g^L вытекает следующий полезный результат.

Следствие 3. *Пространство $H^L(Z)$ неприводимого представления T^L натягивается на векторы*

$$u_g(z) = L_\delta u_0 = L_{\tilde{\delta}}, \tag{21}$$

где g пробегает G. Фактор Гаусса $\tilde{\delta}$ элемента zg является непрерывной функцией z и g. Эти функции удовлетворяют соотношению

$$L_{\tilde{\delta}(z, g_1 g_2)} = L_{\tilde{\delta}(z, g_1)} L_{\tilde{\delta}(zg_1, g_2)}. \tag{22}$$

Из равенств (7) и (21) следует, что если L — аналитическое (антианалитическое) представление, то представление T_g^L — также аналитическое (антианалитическое).

Следствия 2 и 3 дают следующую процедуру разложения приводимого представления T группы G.

1° В пространстве H представления находим максимальное подпространство H_0, которое фиксировано относительно подгруппы Z.

2° В H_0 выбираем нормированный базис $u_0^{(i)}$. Тогда пространство $H^{(i)}$ неприводимого представления T^i натягивается на векторы

$$u_g^{(i)}(z) = T_g u_0^{(i)} = L_{\tilde{\delta}}^{(i)} u_0^{(i)} = L_{\tilde{\delta}}^{i}.$$

Действие $T^{(i)}$ в пространстве $H^{(i)}$ задается формулой (7).

Следующее утверждение описывает структуру пространства $H^L(Z)$ неприводимого представления T^L. Для простоты предположим, что Z — связная нильпотентная группа (это именно тот случай, который понадобится нам в дальнейшем).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пространство $H^L(Z)$ неприводимого представления $T^L(Z)$ состоит из функций $u(z)$, которые являются полиномами матричных элементов z_{pq} элемента $z \in Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 теоремы 1.1 всякое представление $n \to T_n$ разрешимой связной группы $N = DZ$ может быть записано в треугольной форме. Следовательно, представления T_z коммутаторной подгруппы Z могут быть записаны в треугольной форме с L на главной диагонали. Это означает, что алгебра Ли A группы Z, порождаемая матрицами X_{pq}, $p > q$, отображается в алгебру нильпотентных матриц (т. е. для $X \in A$ $X^m = 0$ при некотором целом m). Поэтому матричные элементы матриц $T_z \left(=\exp \sum_{p>q} z_{pq} X_{pq}\right)$ являются полиномами от матричных элементов z_{pq} элемента $z \in Z$. С другой стороны, согласно (15) и (14), имеем

$$e_i(g) = D_{li}(g) = D_{li}(kz) = D_{ls}(k) D_{si}(z) = L_k^l D_{li}(z) = L_\delta^l e_i(z).$$

Поскольку отображение $H^L(G) \to H^L(Z)$ взаимно однозначно, пространство $H(Z)$ натягивается на матричные элементы $e_i(z)$ представления T_z.

Следующее утверждение полезно при определении всех характеров $\delta \to L_\delta$ группы D, которые индуктивны относительно G.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Предположим, что разложение Гаусса для G индуцирует разложение Гаусса подгруппы G_0 группы G:*

$$G_0 = \mathfrak{Z}_0 D_0 Z_0,$$

где $\mathfrak{Z}_0$, D и Z_0 — пересечения G_0 с подгруппами $\mathfrak{Z}$, D и Z группы G соответственно. Пусть $L_{\delta_0}^0$ — ограничение характера L_δ группы D на подгруппу D_0. Если характер L индуктивен относительно G, то характер L^0 индуктивен относительно подгруппы G_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку характер L группы D индуктивен, линейная оболочка функций $u_g(z) = L_{\tilde{\delta}}$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(z, g)$, со-

стоит из полиномов от z_{pq} и, согласно утверждению 3, имеет конечную размерность. То же справедливо для функций

$$u_{g_0}(z_0) = L_{\tilde{\delta}_0}, \quad \tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}(z_0, g_0), \quad z_0 \in Z_0, \quad g_0 \in G_0.$$

Ясно, что функции $u_{g_0}(z_0)$ непрерывны на $Z_0 \times G_0$. Следовательно, в линейной оболочке H_0 этих функций реализовано некоторое представление подгруппы G_0. Вектор $u_0(z_0) = 1$ является единственным вектором в H_0, фиксированным для подгруппы Z_0. Значит, ввиду следствия 3 представление подгруппы G_0 в H_0 неприводимо. Следовательно, характер L^0 подгруппы D_0 индуктивен.

Метод индуцированных представлений имеет ряд преимуществ по сравнению с инфинитезимальным методом Картана—Вейля. Он дает классификацию неприводимых представлений на языке старших весов, и в то же время он дает естественную реализацию пространства представления как линейного пространства $H^L(Z)$ полиномов над стандартной подгруппой Z. Это весьма полезно при решении различных практических задач.

Рассмотрим теперь явное построение операторов T_g^L и пространства представления $H^L(Z)$ для группы SL (2, C), накрывающей группы Лоренца SO (3, 1).

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$. Факторы Гаусса $\mathfrak{Z}$, D и Z в этом случае задаются в виде [см. (3.6.3)]

$$\mathfrak{Z} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad D = \left\{\begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\right\}, \quad Z = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}\right\},$$

где ζ, δ и z принадлежат C^1. Если $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, C)$, то множители $\tilde{\delta}$ и $z_{\tilde{g}}$ элемента $\tilde{g} = zg = \tilde{\zeta}\tilde{\delta}z_{\tilde{g}}$ имеют вид

$$\tilde{\delta} = \beta z + \delta, \quad z_{\tilde{g}} = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}.$$

Произвольный комплексный аналитический характер группы D, согласно (13), задается при помощи

$$\delta \to L_\delta = \delta^m, \tag{23}$$

где m — целое число, которое будет определено ниже. Согласно теореме 2 и равенству (7), всякое неприводимое представление $g \to T_g^L$, индуцированное одномерным представлением (23) группы D, действует по формуле

$$T_g^L u(z) = L_{\tilde{\delta}} u(z_{\tilde{g}}) = (\beta z + \delta)^m u\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \tag{24}$$

Остается лишь определить число m. Ввиду следствия 3 пространство $H^L(Z)$ представления натягивается на векторы

$$u_g(z) = L_{\tilde{g}} = (\beta z + \delta)^m, \tag{25}$$

где β и δ принимают все значения, допустимые для элементов g из SL (2, C). Таким образом, пространство $H^L(Z)$, в частности, содержит все сдвиги

$$u_t(z) = (z + \delta_t)^m.$$

Поскольку $H^L(Z)$ конечномерно, существует число $r \geqslant 1$, такое, что произвольный набор $r + 1$ функций является линейно зависимым. Следовательно, определитель

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_{r+1}(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_{r+1}'(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(r)}(z) & u_2^{(r)}(z) & \cdots & u_{r+1}^{(r)}(z) \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю. Здесь

$$u_1^{(s)}(z) \equiv \frac{\partial^s}{\partial z^s} u_1(z)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Полагая $z = 0$, получаем

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \delta_1^m & \delta_2^m & \cdots & \delta_{r+1}^m \\ m\delta_1^{m-1} & m\delta_2^{m-1} & \cdots & m\delta_{r+1}^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= m^r(m-1)^{r-1} \cdots (m-r+1)[\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{r+1}]^{m-r} \cdot W(\delta),$$

где

$$W(\delta) = \prod_{i<j}(\delta_i - \delta_j).$$

Всегда можно выбрать числа $\delta_i \neq 0$ и такими, что все они различны. Тогда если m не равно ни одному из чисел $0, 1, \ldots, r-1$, то $\Delta(q) \neq 0$. Следовательно, только неотрицательные целые числа $m = 0, 1, 2, \ldots$ задают индуктивные комплексно-аналитические характеры L вида (23). Для целого $m \geqslant 0$, согласно (25), пространство представления H^L содержит все одночлены $1, z, z^2, \ldots, z^m$ и натягивается на них. Таким образом, имеется

Теорема 5. *Всякое комплексно-аналитическое неприводимое представление* SL (2, C) *определяет и само определяется* ***целым***

числом $m \geqslant 0$. Оно реализуется согласно формуле (24) *в пространстве $H^m(Z)$ всех полиномов степени, не большей, чем m.*

Мы имеем также комплексно-антианалитические неприводимые представления $T^{\bar{L}}$, индуцированные характером

$$\bar{L}_\delta = \bar{\delta}^n. \tag{26}$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что n снова должно быть неотрицательным целым числом. Представление $g \to T_g^{\bar{L}}$ задано в пространстве $H^n(\bar{Z})$ полиномов от переменных $1, \bar{z}, \bar{z}^2, \ldots, \bar{z}^n$ по формуле

$$T_g^{\bar{L}} u(z) = \overline{(\beta z + \delta)}^n u\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \tag{27}$$

Наконец, если взять вещественно-аналитический характер $\delta \to L_\delta = \delta^m \bar{\delta}^n$, то получим вещественно-аналитические представления SL (2, C). Таким образом, всякое неприводимое конечномерное представление SL (2, C) определяется парой (m, n) неотрицательных целых чисел. Оно задано в пространстве всех полиномов $u(z, \bar{z})$ степени, не большей чем m по z и не большей чем n по $\bar{z}$, согласно формуле

$$T_g^L u(z, \bar{z}) = (\beta z + \delta)^m \overline{(\beta z + \delta)}^n u\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \frac{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\gamma}}{\bar{\beta}\bar{z} + \bar{\delta}}\right). \tag{28}$$

Другими словами, всякое вещественно-аналитическое неприводимое представление группы SL (2, C) является тензорным произведением вида

$$T^{L_1} \otimes \overline{T^{L_2}}, \tag{29}$$

где T^{L_1} и T^{L_2} — комплексно-аналитические неприводимые представления группы G, а $\overline{T^L}$ обозначает сопряженное к T^L представление.

При сужении на подгруппу SU (2) формула (24) дает неприводимое унитарное представление SU (2) (см. упражнение 9.2.1). Действительно, используя «унитарный трюк Вейля», мы приходим к заключению, что каждое неприводимое представление группы SU (2) является сужением неприводимого комплексно-аналитического представления группы SL (2, C) на подгруппу SU (2).