

§ 4. Представления симплектических групп $\mathrm{Sp}(n, C)$, $\mathrm{Sp}(n, R)$ и $\mathrm{Sp}(n)$

Симплектическую группу $\mathrm{Sp}(n, C)$ можно реализовать в виде множества всех линейных преобразований n -мерного комплексного векторного пространства (n — четное, т. е. $= 2v$), сохраняющих кососимметрическую форму

$$[x, y] = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_vy_{v+1} - x_{v+1}y_v - \dots - x_ny_1. \quad (1)$$

Таким образом, $g \in \mathrm{Sp}(n, C)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma^{-1}g\sigma = (g^T)^{-1}, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

и S — $v \times v$ -матрица вида

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, $\mathrm{Sp}(2, C)$ изоморфна $\mathrm{SL}(2, C)$.

Разложение Гаусса группы $\mathrm{GL}(n, C)$ индуцирует разложение Гаусса для $\mathrm{Sp}(n, C)$:

$$\mathrm{Sp}(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}_S D_S Z_S}, \quad (3)$$

где \mathfrak{Z}_S , D_S и Z_S — пересечения $\mathrm{Sp}(n, C)$ с соответствующими подгруппами группы $\mathrm{GL}(n, C)$.

Из равенства (2) следует, что

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix}$$

является элементом из D_S , если любые два из чисел

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v, \delta_{v+1}, \dots, \delta_{n-1}, \delta_n, \quad (4)$$

равноудаленные от середины, являются взаимно обратными, т. е. $\delta_n = \delta_1^{-1}$, $\delta_{n-1} = \delta_2^{-1}$ и т. д. Взяв $\delta_1, \dots, \delta_v$ в качестве независимых параметров элемента $\delta \in D_S$, мы видим, что всякий комплексно-аналитический характер на D_S имеет вид

$$\delta \rightarrow L_\delta = \delta_1^{m_1} \delta_2^{m_2} \dots \delta_v^{m_v}. \quad (5)$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Всякое комплексно-аналитическое неприводимое представление T^L группы $\mathrm{Sp}(n, C)$ определяет и в свою очередь определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \dots, m_v)$, компонентами которого являются целые числа, удовлетворяющие условию

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_v \geq 0. \quad (6)$$

Пространство $H^L(Z_S)$ представления T^L состоит из полиномов от матричных элементов z_{pq} элементов $z \in Z_S$. Представление T^L реализуется в $H^L(Z_S)$ посредством формулы

$$T_g^L u(z) = L_\delta u(z_{\tilde{g}}), \quad (7)$$

где δ и $z_{\tilde{g}}$ — множители в разложении Гаусса (3) элемента $\tilde{g} \equiv zg = \tilde{\zeta}\tilde{\delta}z_{\tilde{g}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T^L — неприводимое представление $\mathrm{Sp}(n, C)$, индуцированное характером $\delta \rightarrow L_\delta$ подгруппы D_S , заданным согласно (5). Пусть G_1, G_2, \dots, G_v — последовательность подгрупп группы $\mathrm{Sp}(n, C)$, изоморфных $\mathrm{SL}(2, C)$. В частности, G_1 состоит из всех линейных преобразований вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & 0 \\ \gamma & \delta & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & \alpha - \beta \\ 0 & & & & & -\gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (8)$$

Подгруппы G_2, \dots, G_{v-1} получаются аналогично, если двигаться вдоль главной диагонали. Подгруппа G_v состоит из всех унимодулярных преобразований, которые действуют только на координаты x_v и x_{v+1} . Повторяя теперь аргументы из доказательства теоремы 3.1, приходим к выводу, что все числа $m_1 — m_2, \dots, m_{v-1} — m_v, m_v$ являются неотрицательными целыми. Это доказывает необходимость условия (6).

Предположим теперь, что $m = (m_1, \dots, m_v)$ удовлетворяет условию (6). Тогда старший вес $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_v, 0, \dots, 0)$ подгруппы D группы $\mathrm{GL}(n, C)$ является индуктивным относительно $\mathrm{GL}(n, C)$ ввиду теоремы 3.1. Следовательно, характер (5) индуктивен относительно $\mathrm{Sp}(n, C)$ ввиду утверждения 2.4. Это доказывает, что условие (6) является также и достаточным.

Из утверждения 2.3 и соотношения (3.7) следует, что пространство представления $H^L(Z_S)$ состоит из полиномов в Z_S . Тогда формула (7) следует из леммы 2.1.

Свойства комплексно-аналитических и вещественно-аналитических неприводимых представлений группы $\mathrm{Sp}(n, C)$ аналогичны свойствам соответствующих представлений $\mathrm{SL}(n, C)$. Поскольку $\mathrm{Sp}(n, C)$ односвязна, все неприводимые представления T^L группы $\mathrm{Sp}(n, C)$ однозначны.

Воспользовавшись теоремами 1.3 и 1, заключаем, что всякое неприводимое аналитическое представление вещественной симплектической группы $\mathrm{Sp}(n, R)$ определяет и само определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \dots, m_v)$, компонентами которого являются целые числа, удовлетворяющие условию (6). То же справедливо для компактных симплектических групп $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n, C) \cap U(2n)$.

§ 5. Представления ортогональных групп $\mathrm{SO}(n, C)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $\mathrm{SO}^*(n)$ и $\mathrm{SO}(n)$

Определяющим представлением ортогональной группы $\mathrm{SO}(n, C)$ является множество всех линейных унимодулярных преобразований, сохраняющих квадратичную форму

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Однако для наших целей более удобно реализовать $\mathrm{SO}(n, C)$ в виде группы унимодулярных линейных преобразований, сохраняющих форму

$$z_1 z_n + z_2 z_{n-1} + \cdots + z_n z_1. \quad (1)$$

Над полем комплексных чисел обе формы совпадают. Каждый элемент $g \in \mathrm{SO}(n, C)$ удовлетворяет условию

$$\sigma^{-1} g \sigma = (g^T)^{-1}, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

В реализации (1) разложение Гаусса группы $\mathrm{GL}(n, C)$ индуцирует соответствующее разложение Гаусса группы $\mathrm{SO}(n, C)$, т. е.

$$\mathrm{SO}(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}_0 D_0 Z_0}, \quad (3)$$

где \mathfrak{Z}_0 , D_0 и Z_0 — пересечения $\mathrm{SO}(n, C)$ с подгруппами \mathfrak{Z} , D и Z группы $\mathrm{GL}(n, C)$ соответственно.