Свойства комплексно-аналитических и вещественно-аналитических неприводимых представлений группы Sp (n, C) аналогичны свойствам соответствующих представлений SL (n, C). Поскольку Sp (n, C) односвязна, все неприводимые представления T^L группы Sp (n, C) однозначны.

Воспользовавшись теоремами 1.3 и 1, заключаем, что всякое неприводимое аналитическое представление вещественной симплектической группы Sp (n, R) определяет и само определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, компонентами которого являются целые числа, удовлетворяющие условию (6). То же справедливо для компактных симплектических групп $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n, C) \cap U(2n)$.

§ 5. Представления ортогональных групп SO(n, C), SO(p, q), SO$^*(n)$ и SO(n)

Определяющим представлением ортогональной группы SO (n, C) является множество всех линейных унимодулярных преобразований, сохраняющих квадратичную форму

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Однако для наших целей более удобно реализовать SO (n, C) в виде группы унимодулярных линейных преобразований, сохраняющих форму

$$z_1 z_n + z_2 z_{n-1} + \cdots + z_n z_1. \tag{1}$$

Над полем комплексных чисел обе формы совпадают. Каждый элемент $g \in \mathrm{SO}(n, C)$ удовлетворяет условию

$$\sigma^{-1} g \sigma = (g^T)^{-1}, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 1 \ldots & & 0 \\ 1 & 0 \ldots & & 0 \end{bmatrix}.$$

В реализации (1) разложение Гаусса группы GL (n, C) индуцирует соответствующее разложение Гаусса группы SO (n, C), т. е.

$$\mathrm{SO}(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}_0 D_0 Z_0}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{Z}_0$, D_0 и Z_0 — пересечения SO (n, C) с подгруппами $\mathfrak{Z}$, D и Z группы GL (n, C) соответственно.

Группа SO $(2n+1, C)$ двухсвязна, а SO $(2n, C)$ — четырехсвязна (см. гл. 3, § 7, Д). Следовательно, можно ожидать, что SO (n, C) имеет также и многозначные неприводимые представления. Это является отличительной чертой теории представлений ортогональных групп. Например, четырехмерное уравнение Дирака можно рассматривать как прямое следствие существования дополнительных спинорных представлений ортогональной группы SO $(4, C)$.

Полная ортогональная группа O (n, C) состоит из двух связных компонент $O^+(n, C)$ и $O^-(n, C)$, элементы которых удовлетворяют условиям $\det g = \pm 1$ соответственно. Следовательно, исходя из произвольного элемента o в O^-, можно получить все остальные элементы из O^- путем применения левого или правого сдвига на элемент $g \in O^+$. В качестве элемента o можно взять матрицу $o = -e$ в случае нечетного n или $2\nu \times 2\nu$-матрицу

$$O=\begin{bmatrix}
1 & & & & & \vdots & & & & & & 0\\
& \ddots & & & & \vdots & & & & & & \\
& & 1 & & & \vdots & & & & & & \\
& & & \ddots & & \vdots & & & & & & \\
& & & & 1 & \vdots & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
& & & & & 1 & 0 & & & & & \\
& & & & & \vdots & & 1 & & & & \\
& & & & & \vdots & & & \ddots & & & \\
& & & & & \vdots & & & & 1 & & \\
& & & & & \vdots & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & \vdots & & & & & & 1
\end{bmatrix} \tag{4}$$

в случае четного n, $n = 2\nu$. Матрица (4) соответствует перестановке координат z_ν и $z_{\nu+1}$. В обоих случаях имеем $o^2 = e$.

Ясно, что группа SO $(n, C) = O^+(n, C)$ является нормальной подгруппой в O (n, C). Это, в частности, означает, что отображение

$$g \to \breve{g} \equiv ogo^{-1} \tag{5}$$

оставляет подгруппу SO (n, C) инвариантной. Внешний автоморфизм (5) группы SO (n, C) будем называть зеркальным автоморфизмом, а соответствующее преобразование o — зеркальным от-

ражением. Используя явный вид подгрупп $\mathfrak{Z}_0$, D_0 и Z_0, нетрудно проверить, что зеркальный автоморфизм оставляет эти подгруппы инвариантными. Следовательно, разложение Гаусса $g = \zeta\delta z$ переходит в соответствующее разложение Гаусса элемента $\check{g}$.

Матрица $\delta \in D$ сохраняет форму (1), если в ряду $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu, \delta_{\nu+1}, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n$ симметрично расположенные элементы взаимно обратны (т. е. $\delta_1 = \delta_n^{-1}$, $\delta_2 = \delta_{n-1}^{-1}$ и т. д.). Следовательно, как в случае четного n ($n = 2\nu$), так и в случае нечетного ($n = 2\nu + 1$), в качестве независимых матричных элементов матрицы $\delta \in D_0$ мы имеем только числа $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$. Таким образом, всякое одномерное комплексно-аналитическое представление L подгруппы D_0 имеет вид

$$\delta \to L_\delta = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \cdots \delta_\nu^{m_\nu}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Если T — неприводимое представление группы* SO $(2\nu, C)$, *соответствующее старшему весу $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, то зеркально-сопряженное представление $\check{T}_g = T_{\check{g}}$ соответствует старшему весу*

$$\check{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_{\nu-1}, -m_\nu). \tag{7}$$

Если $n = 2\nu + 1$, то каждое неприводимое представление является зеркально-самосопряженным.

Доказательство. Поскольку отображение $g \to \check{g}$ сохраняет структуру подгрупп $\mathfrak{Z}_0$, D_0, Z_0, достаточно найти образ характера L_δ. Если n четно ($n = 2\nu$), то все параметры δ_i остаются без изменения, за исключением параметра δ_ν, который переходит в δ_ν^{-1}. Если n нечетно, то $o = -e$ и δ не изменяется.

Следующая теорема дает классификацию всех комплексно-аналитических неприводимых представлений группы SO (n, C).

Теорема 2. *Группа* SO (n, C) *обладает двумя сериями комплексно-аналитических неприводимых представлений. Каждое представление первой серии определяет и в свою очередь определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, компонентами которого являются целые числа m_i, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} &1^\circ \text{ для } n = 2\nu: \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|, \\ &2^\circ \text{ для } n = 2\nu + 1: \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant m_\nu \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Каждое представление второй серии определяет и само определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, компонентами m_i которого являются полуцелые числа, также удовлетворяющие условиям (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Случай* $n = 2\nu$. Пусть G_0 — подгруппа в SO $(2\nu, C)$, состоящая из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & \hat{g} \end{bmatrix}, \quad g \in \mathrm{SL}(\nu, C), \tag{9}$$

где $\hat{g} = S^{-1}(g^T)^{-1} S$. Ясно, что G_0 изоморфна SL (ν, C). Если характер L^m подгруппы D_0 является индуктивным относительно SO $(2\nu, C)$, то его сужение на G_0 индуктивно относительно G_0. Отсюда ввиду (13) получаем

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant m_\nu, \tag{10}$$

где m_i — целые. Повторяя эти рассуждения для зеркально сопряженного представления, получаем

$$m_1 \geqslant m_2 \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant -m_\nu. \tag{11}$$

Кроме того, с помощью (3.13) мы находим, что оба числа

$$m_i - m_\nu \quad \text{и} \quad m_i + m_\nu$$

целые. Следовательно, компоненты $m_1, \ldots, m_\nu$ должны быть одновременно либо все целыми, либо все полуцелыми числами. Это доказывает необходимость условия (8) 1°.

Предположим теперь, что условие (8) 1° удовлетворяется для некоторого веса $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, где все m_i являются либо одновременно целыми, либо полуцелыми числами. Поскольку зеркально сопряженный характер может быть индуктивным только одновременно с исходным характером, мы можем предположить, что $m_\nu \geqslant 0$. Тогда характер подгруппы D (2ν) группы GL $(2\nu, C)$, заданный весом $m = (m_1, \ldots, m_\nu, 0, \ldots, 0)$, индуктивен относительно GL $(2\nu, C)$ согласно теореме 3.1. Следовательно, в силу утверждения 2.4, сужение его на SO $(2\nu, C)$ является индуктивным относительно этой группы.

Случай $n = 2\nu + 1$. Доказательство проводится аналогично случаю четного n. Последнее условие в соотношении (8) 2° $(m_\nu \geqslant 0)$ следует из рассмотрения подгруппы SO $(3, C)$, состоящей из вращений, преобразующих только координаты x_ν, $x_{\nu+1}$ и $x_{\nu+2}$. Действительно, поскольку SO $(3, C)$ локально изоморфна SL $(2, C)$, по теореме 3.2 получаем $m_\nu \geqslant 0$.

Неприводимые представления группы SO (n, C), ассоциированные со старшими весами с целочисленными компонентами, являются тензорными представлениями. Остальные представления называются спинорными представлениями.

Наинизшие спинорные представления играют существенную роль в физике. В случае группы SO $(2\nu + 1, C)$ нижайшее спинорное представление задается старшим весом

$$m_+ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

В случае SO $(2\nu, C)$ существуют два нижайшие спинорные представления, а именно m_+ [соотношение (12)] и

$$m_- = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Эти представления зеркально сопряжены. Линейные объекты, которые преобразуются по представлениям $T^{L^{m_+}}$ и $T^{L^{m_-}}$, называются *спинорами первого и второго рода* соответственно.

Группа SO (n, C) также обладает комплексно-антианалитическими и вещественно-аналитическими представлениями. Их свойства аналогичны свойствам соответствующих представлений группы SL(n, C).

С помощью теоремы 3.1 приходим к заключению, что теорема 2 справедлива также для связных компонент вещественных форм группы SO (n, C), т. е. SO (p, q), $p + q = n$, SO* (n), $n = 2\nu$, и SO (n).

§ 6. Фундаментальные представления

Пусть G — группа Ли, допускающая разложение Гаусса $G = \overline{\mathfrak{Z}DZ}$. Как было показано в § 2, всякое неприводимое представление T^{L^m} группы G является индуцированным представлением, а именно, оно индуцировано одномерным представлением

$$\delta \to L^m_\delta = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \ldots \delta_n^{m_n} \tag{1}$$

подгруппы D группы G. Компоненты старшего веса $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ удовлетворяют определенным условиям, установленным нами для каждого класса классических групп.

Определение 1. Неприводимое представление T^{L^m} называется *произведением Юнга* неприводимых представлений $T^{L^{m'}}$ и $T^{L^{m''}}$, если

$$L^m_\delta = L^{m'}_\delta L^{m''}_\delta. \tag{2}$$

Из равенства (2) ввиду соотношения (2.21) вытекает, что пространство представления $H^{L^m}(Z)$ является линейной оболочкой произведений полиномов $p'(z)\,p''(z)$, где $p'(z) \in H^{L^{m'}}(Z)$ и $p''(z) \in H^{L^{m''}}(Z)$. Отметим разницу между этим произведением Юнга и тензорным произведением $T^{L^{m'}} \otimes T^{L^{m''}}$, чье пространство натягивается на произведения $p'(z')\,p''(z'')$.