Наинизшие спинорные представления играют существенную роль в физике. В случае группы SO $(2\nu + 1, C)$ нижайшее спинорное представление задается старшим весом

$$m_+ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

В случае SO $(2\nu, C)$ существуют два нижайшие спинорные представления, а именно m_+ [соотношение (12)] и

$$m_- = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Эти представления зеркально сопряжены. Линейные объекты, которые преобразуются по представлениям $T^{L^{m_+}}$ и $T^{L^{m_-}}$, называются *спинорами первого и второго рода* соответственно.

Группа SO (n, C) также обладает комплексно-антианалитическими и вещественно-аналитическими представлениями. Их свойства аналогичны свойствам соответствующих представлений группы SL(n, C).

С помощью теоремы 3.1 приходим к заключению, что теорема 2 справедлива также для связных компонент вещественных форм группы SO (n, C), т. е. SO (p, q), $p + q = n$, SO* (n), $n = 2\nu$, и SO (n).

§ 6. Фундаментальные представления

Пусть G — группа Ли, допускающая разложение Гаусса $G = \overline{\mathfrak{Z}DZ}$. Как было показано в § 2, всякое неприводимое представление T^{L^m} группы G является индуцированным представлением, а именно, оно индуцировано одномерным представлением

$$\delta \to L^m_\delta = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \ldots \delta_n^{m_n} \tag{1}$$

подгруппы D группы G. Компоненты старшего веса $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ удовлетворяют определенным условиям, установленным нами для каждого класса классических групп.

Определение 1. Неприводимое представление T^{L^m} называется *произведением Юнга* неприводимых представлений $T^{L^{m'}}$ и $T^{L^{m''}}$, если

$$L^m_\delta = L^{m'}_\delta L^{m''}_\delta. \tag{2}$$

Из равенства (2) ввиду соотношения (2.21) вытекает, что пространство представления $H^{L^m}(Z)$ является линейной оболочкой произведений полиномов $p'(z)\,p''(z)$, где $p'(z) \in H^{L^{m'}}(Z)$ и $p''(z) \in H^{L^{m''}}(Z)$. Отметим разницу между этим произведением Юнга и тензорным произведением $T^{L^{m'}} \otimes T^{L^{m''}}$, чье пространство натягивается на произведения $p'(z')\,p''(z'')$.

Пользуясь понятием произведения Юнга, мы можем выразить произвольное неприводимое представление T^{L^m} через совокупность наиболее простых представлений, называемых *фундаментальными представлениями*. В случае группы GL (n, C) в качестве фундаментальных мы можем взять следующие представления (для простоты предполагаем, что m_n — целое):

$$\begin{aligned} \overset{1}{m} &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \overset{2}{m} &= (1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{k}{m} &= (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{k},\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{n}{m} &= (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{n}). \end{aligned} \tag{3}$$

Из соотношения (1) очевидно, что всякое другое неприводимое представление группы GL (n, C) является произведением Юнга представлений типа (3).

В случае групп SL (n, C) и Sp $(2n, C)$ фундаментальные веса совпадают с первыми $n-1$ фундаментальными весами группы GL (n, C). В случае SO $(2\nu+1)$ фундаментальными весами являются

$$\begin{aligned} \overset{1}{m} &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \overset{2}{m} &= (1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{\nu-1}{m} &= (1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0), \\ \overset{\nu}{m} &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Последний вес соответствует спинорному представлению. Наконец, в случае SO (2ν) имеем два спинорных представления, и фундаментальные веса имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{1}{m} &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \overset{2}{m} &= (1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{\nu-2}{m} &= (1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ 0), \\ \overset{\nu-1}{m} &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ \overset{\nu}{m} &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Если воспользоваться условиями, налагаемыми на компоненты старших весов, соответствующих индуктивному характеру, то получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Картана). *Для всякой простой классической группы Ли G ранга n существует n фундаментальных весов $\overset{i}{m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что каждый старший вес $m = (m_1, m_2, \ldots, \ldots, m_n)$, соответствующий неприводимому представлению T^{L^m} группы G, дается линейной комбинацией*

$$m = \sum_{i=1}^{n} f_i \overset{i}{m}$$

с неотрицательными целочисленными коэффициентами

$$f_i = m_i - m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m_{n+1} = 0. \tag{6}$$

В современной литературе символ $D^N [f_1, f_2, \ldots, f_n]$ используется для обозначения неприводимого представления размерности N со старшим весом $m = f_1\overset{1}{m} + f_2\overset{2}{m} + \cdots + f_n\overset{n}{m}$, выраженным через фундаментальные веса. Этот символ следует отличать от символа $D^N (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, где m_i — компоненты старшего веса, определяющие индуктивный характер $L^m = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2}\ldots \ldots \delta_n^{m_n}$.

Ввиду формулы (1) и определения 1 ясно, что представление T^{L^m}, соответствующее старшему весу $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, является произведением Юнга фундаментальных представлений $T^{L^{\overset{i}{m}}}$, взятых f_i раз каждое.

§ 7. Представления произвольных групп Ли

Из теоремы Леви—Мальцева мы знаем, что произвольную односвязную группу Ли G можно представить в виде полупрямого произведения

$$G = R \rtimes G_S, \tag{1}$$

где R — максимальная односвязная разрешимая нормальная подгруппа в G, а G_S — полупростая односвязная подгруппа в G. Подгруппа R называется *радикалом* группы G. Это свойство групп Ли позволяет развить теорию представлений для произвольных групп Ли, подобно случаю полупростых групп. Прежде всего покажем интересное свойство сужения T_R неприводимого представления T группы G на радикал R.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $g \to T_g$ — неприводимое представление односвязной группы Ли G, и пусть N — произвольная связная раз-*