$< \infty$ тогда и только тогда, когда фактор Леви G_S содержит нетривиальную компактную нормальную подгруппу.

Доказательство. По теореме 2 $T = \chi \otimes \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ — неприводимое представление связной полупростой подгруппы G_S группы G. Тогда если G_S содержит нетривиальную компактную нормальную подгруппу K, то, выбирая χ унитарным, а в качестве $\tilde{T}$ неприводимое унитарное представление K, можно расширить $\tilde{T}$ до G_S, и мы получаем унитарное неприводимое представление T группы G с $1 \lhd \dim T < \infty$. Если же G_S не содержит компактной нормальной подгруппы, то она является прямым произведением простых односвязных некомпактных групп. По теореме 1.2, следовательно, G_S не допускает нетривиальное конечномерное унитарное представление.

Интересно, что теорему Вейля можно обобщить на произвольные односвязные группы Ли.

Теорема 4. *Представление T_G односвязной группы Ли G вполне приводимо тогда и только тогда, когда его ограничение T_R на радикал R вполне приводимо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда инвариантное подпространство H_1 пространства представления H и фактор-пространство H/H_1 неприводимы. Если сужение T_R представления T_G на радикал R вполне приводимо, то существует пространство $H_2 \subset H$, дополнение подпространства H_1, которое инвариантно по отношению к R. Из теоремы 1 следует, что действие радикала R в H_1 и H_2 сводится к умножению на характеры χ_1 и χ_2 радикала R соответственно. Если $\chi_1 \neq \chi_2$, то H_2 является максимальным подпространством в H, на котором действие радикала R задано посредством умножения на χ_2; рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что H_2 инвариантно и по отношению ко всей группе G. Следовательно, T вполне приводимо в H.

Если $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, то, полагая $\chi(g) = \chi(\{r, g_s\}) = \chi(r)$ и используя соотношение (3), мы можем расширить характер χ на всю группу G. Взяв затем тензорное произведение $\chi^{-1}(g) \otimes T_g$, получаем представление G, которое тривиально на радикале. Таким образом, это дает представление полупростой группы $G_S \simeq G/R$, которое вполне приводимо по теореме Вейля.

§ 8. Другие результаты и комментарии

Обсудим теперь вкратце ряд других результатов, важных для приложений.

А. *Сужение представления на подгруппу*

Во многих физических задачах возникает следующий вопрос: какие неприводимые представления подгруппы G_0 группы G входят в сужение на подгруппу G_0 неприводимого представления T группы G?

Основной результат для случая GL (n, C) состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Неприводимое представление* GL (n, C), *задаваемое старшим весом* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, *при сужении на подгруппу* $G_0 \simeq$ GL $(n-1, C)$ *содержит все неприводимые представления* G_0 *со старшими весами* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{n-1})$, *удовлетворяющими следующим условиям:*

$$m_1 \geqslant l_1 \geqslant m_2 \geqslant l_2 \geqslant m_3 \geqslant \cdots \geqslant m_{n-1} \geqslant l_{n-1} \geqslant m_n. \qquad (1)$$

Каждая неприводимая компонента содержится однократно.

(Доказательство см. в [874], § 13.)

Эта теорема ввиду теоремы 3.1 справедлива также для всех вещественных форм группы GL (n, C) и, в частности, для редукции неприводимых представлений унитарной группы $U(n)$ по отношению к $U(n-1)$.

Аналогичный результат имеем для ортогональных групп.

ТЕОРЕМА 2. *Неприводимое представление группы* SO $(2\nu + 1, C)$, *задаваемое старшим весом* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ *с целочисленными (полуцелочисленными) компонентами, при сужении на подгруппу* $G_0 \simeq$ SO $(2\nu, C)$ *содержит все неприводимые представления подгруппы* G_0, *старшие веса* $q = (q_1, q_2, \ldots, q_\nu)$ *которых удовлетворяют следующим условиям:*

$$m_1 \geqslant q_1 \geqslant m_2 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant m_\nu \geqslant q_\nu \geqslant -m_\nu. \qquad (2)$$

Компоненты q_i *являются одновременно все целыми (если* m_i *целые) или все полуцелыми (если* m_i *полуцелые). Каждое неприводимое представление входит однократно.*

Аналогично сужение неприводимых представлений группы SO $(2\nu, C)$, *задаваемых старшим весом* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ *с целочисленными (или полуцелочисленными) компонентами, содержит все неприводимые представления подгруппы* $G_0 \simeq$ SO $(2\nu - 1, C)$, *старшие веса* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{\nu-1})$ *которых удовлетворяют соотношениям*

$$m_1 \geqslant p_1 \geqslant m_2 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant p_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|.$$

Компоненты p_i *являются одновременно все целыми (все полуцелыми) вместе с* m_i. *Каждое неприводимое представление входит однократно.*

(Доказательство см. в [874], § 13.)

Ясно, что все утверждения теоремы 2 справедливы и для вещественных форм группы SO (n, C), в частности для вещественных ортогональных групп SO (n) и SO (p, q), $p + q = n$.

Аналогичные, хотя и более сложные, результаты имеют место для симплектических групп.

Доказательства этих теорем могут быть проведены различными методами. В частности, можно дать элементарное доказательство на языке схем Юнга (см. [363], гл. 10).

Техника индуцированных представлений, использовавшаяся Желобенко [874], позволяет не только изящно доказать теоремы 1 и 2, но также построить пространства, в которых реализуются неприводимые представления соответствующих подгрупп.

Задача редукции представлений SU $(m + n)$ по отношению к SU $(m) \otimes$ SU (n) рассматривалась Хагеном и Макфарлейном. Некоторые частные случаи редукции SU $(m + n)$ по отношению к SU $(m) \otimes$ SU (n) и SU (n) по отношению к SO (n) рассмотрены Желобенко ([882], гл. XVIII). Эти задачи исследовались также Уиппманом [845].

Б. *Весовые диаграммы*

Пусть T^{L^m} — неприводимое представление полупростой группы Ли G, соответствующее старшему весу m, и пусть $u_m(z) \equiv \equiv 1$ — старший вектор в пространстве $H^m(Z)$ представления T^{L^m}. Обозначая генераторы подгруппы Z (3) через E_α $(E_{-\alpha})$, а генераторы подгруппы D — через H_i и используя коммутационные соотношения Картана—Вейля, получаем

$$H_i E_{\pm\alpha} u_m = (E_{\pm\alpha} H_i \pm \alpha(H_i) E_{\pm\alpha}) u_m = (m_i \pm \alpha(H_i)) E_{\pm\alpha} u_m. \quad (3)$$

Векторы, собственные для H_i, называются *весовыми векторами*, а собственные значения являются компонентами *веса*. Следовательно, векторы $E_{\pm\alpha} u_m$ наряду с u_m формально также являются весовыми векторами в пространстве представления H^m. Однако действие подгруппы Z в H^m означает [см. (2.17)], что

$$T^{L^m}_{z_0} u_m(z) = u_m(zz_0) = u_m, \quad (4)$$

или в инфинитезимальной форме

$$E_\alpha u_m = 0. \quad (5)$$

Значит, ввиду (3) в H^m не может быть весового вектора с весом $m' = (m_1 + \alpha(H_1), \ldots, m_n + \alpha(H_n))$ [1]). Это объясняет термины «старший вес» и «старший вектор» для m и u_m. Пусть

$$v = E_{-\alpha(1)} E_{-\alpha(2)} \cdots E_{-\alpha(s-1)} E_{-\alpha(s)} u_m, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad (6)$$

[1]) Мы говорим, что вес m' *старше* чем m, если первая неисчезающая компонента вектора $m' - m$ положительна.

где генераторы $E_{-\alpha}$ и E_α расположены в произвольном порядке. Тогда из (3) вытекает

$$H_i v = (m_i - \alpha^{(1)}(H_i) - \alpha^{(2)}(H_i) - \cdots - \alpha^{(s-1)}(H_i) + \alpha^{(s)}(H_i) v, \tag{7}$$

т. е. каждый ненулевой вектор (6) является весовым вектором. Далее, старший вектор u_m цикличен для представления T^{L^m} в силу следствия 3 теоремы 2.2. Таким образом, на весовые векторы (6) натягивается пространство H^m представления T^{L^m}.

Ввиду равенства (7) произвольный вес имеет вид

$$m - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_n\alpha_n, \tag{8}$$

где k_i — неотрицательные целые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — простые корни, а n — размерность подалгебры Картана. В соотношении (8) мы можем ограничиться только простыми корнями благодаря тому факту, что всякий положительный корень является суммой простых корней с неотрицательными коэффициентами. Поскольку размерность H^m конечна, число различных весов также конечно.

Оказывается удобным с каждым весом (8) ассоциировать точку в n-мерном векторном пространстве R^n. Диаграмма в R^n, соответствующая совокупности всех весов, называется *весовой диаграммой данного представления*.

Равенство (7) означает, в частности, что все генераторы H_i подгруппы Картана D диагональны в пространстве H^m. В физических приложениях, если G — группа симметрии некоторой физической системы, то генераторы H_i являются одновременно диагонализуемыми, а следовательно, наблюдаемыми. Например, в случае симметрии SU (3) в физике элементарных частиц в качестве генератора H_1 можно взять третью компоненту изоспина, а в качестве генератора H_2 — гиперзаряд. Таким образом, веса дают значения измеримых величин.

Важнейшей для приложений является задача нахождения всех весов, связанных с данным старшим весом, и их кратностей. Эта задача была решена Фрейденталем [283] и Костантом [482].

Для формулировки теоремы Фрейденталя необходимо ввести скалярное произведение корней и весов. Заметим сначала, что корни и веса являются элементами дуального пространства H^* алгебры Картана H. С другой стороны, согласно формуле (1.4.3), для всякого $\lambda \in H^*$ существует однозначно определяемый элемент $H_\lambda \in H$, такой, что

$$\lambda(X) = (H_\lambda, X) \quad \text{для всех} \quad X \in H, \tag{9}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга алгебры L группы G. При $\lambda, \mu \in H^*$ скалярное произведение (λ, μ) можно определить как

$$(\lambda, \mu) = (H_\lambda, H_\mu). \tag{10}$$

Поскольку G полупроста, по теореме 1.4.1 сужение формы Киллинга на H, а следовательно, и скалярное произведение (10) являются невырожденными. Формула Фрейденталя выражает кратность n_M веса M через кратности весов $M + k\alpha$, $\alpha > 0$. В более точном виде имеем:

ТЕОРЕМА 3. *Кратность n_M веса M в весовой диаграмме, ассоциированной со старшим весом m, дается рекуррентной формулой*

$$[(m+r,\ m+r)-(M+r,\ M+r)]\,n_M = 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha>0} n_{M+k\alpha}(M+k\alpha,\ \alpha), \tag{11}$$

где

$$r = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha.$$

(Доказательство см. в [283].)

Формула (11) дает эффективный метод вычисления кратности n_M веса M, начиная с $n_m = 1$. Ясно, что в силу (8) суммирование по k в формуле (11) является конечным.

Введем теперь группу Вейля с целью дать формулу Костанта. Пусть μ — вектор из весового (или корневого) пространства, и пусть α — корень. Положим

$$\mu' \equiv S_\alpha(\mu) \equiv \mu - \frac{2(\mu,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha. \tag{12}$$

Поскольку $S_\alpha(\alpha) = -\alpha$, а для $\mu \perp \alpha$ $S_\alpha(\mu) = \mu$, отображение $\alpha \to S_\alpha$ является отражением по отношению к гиперплоскости, перпендикулярной вектору α. Ясно, что $S_\alpha^2 = I$ и S_α — ортогональные преобразования, т. е.

$$(S_\alpha(\mu_1),\ S_\alpha(\mu_2)) = (\mu_1,\ \mu_2). \tag{13}$$

Порождаемая преобразованиями S_{α_i} (α_i — простые корни) линейная группа называется *группой Вейля* W. Если $S \in W$ представлен произведением четного числа отражений относительно гиперплоскостей, перпендикулярных к корням, то $\det S = 1$. В противном случае $\det S = -1$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $P(R)$, $R \in H^*$ — функция разбиения, равная числу решений $(k_\alpha,\ k_\beta,\ \ldots,\ k_\delta)$ уравнения*

$$R = \sum_{\alpha>0} k_\alpha \alpha, \tag{14}$$

где α — положительные корни, а k_α — неотрицательные целые числа. Тогда кратность n_M веса M, ассоциированного со старшим весом m, дается формулой

$$n_M = \sum_{S\in W}(\det S)\,P\,[S(m+r)-(M+r)]. \tag{15}$$

(Доказательство см. в [482].)

Формула Костанта полезна скорее в теоретическом рассмотрении. Для практических вычислений она малоэффективна, поскольку нет эффективного метода для вычисления функции разбиения $P(R)$.

В случае алгебр ранга 2 и алгебры A_3 явные выражения для функции $P(R)$ были получены Янски.

Другие формулы для кратностей весов, иногда более удобные для приложений, были найдены Климыком [467, 468].

B. *Разложение тензорного произведения*

Задача разложения тензорного произведения $T \otimes T'$ неприводимых представлений T и T' топологической группы G называется задачей о «*ряде Клебша—Гордана*».

Рассмотрим сначала случай GL (n, C). На представлениях

$$L^m = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \cdots \delta_n^{m_n}$$

подгруппы D определяем следующие операторы $\hat{\delta}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{\delta}_k L^m \equiv \begin{cases} \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \cdots \delta_k^{m_k+1} \cdots \delta_n^{m_n}, & \text{если } m_{k-1} > m_k, \\ 0 & \text{если } m_{k-1} = m_k. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что операторы $\hat{\delta}_k$ некоммутативны. Следующая теорема дает общую формулу для разложения тензорного произведения $T^{L^m} \otimes T^{L^{m'}}$ неприводимых представлений по операторам $\hat{\delta}_k$.

Теорема 5. *Пусть T^{L^m} и $T^{L^{m'}}$ — неприводимые представления группы* GL (n, C), *индуцированные представлениями L^m и $L^{m'}$ подгруппы D соответственно. Тогда тензорное произведение $T^{L^m} \otimes T^{L^{m'}}$ сводится к*

$$\sum_{m''} \oplus T^{L^{m''}},$$

где $L^{m''}$ — слагаемые в разложении следующего детерминанта:

$$\Gamma_{m_1 m_2 \ldots m_n} L^{m'} \equiv \begin{vmatrix} \Gamma_{m_1} & \Gamma_{m_1+1} & \cdots & \Gamma_{m_1+(n-1)} \\ \Gamma_{m_2-1} & \Gamma_{m_2} & \cdots & \Gamma_{m_2+(n-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{m_n-(n-1)} & \Gamma_{m_n-(n-2)} & \cdots & \Gamma_{m_n} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

в котором

$$\Gamma_m = \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m} \hat{\delta}_1^{\nu_1}\hat{\delta}_2^{\nu_2} \cdots \hat{\delta}_n^{\nu_n}, \quad \Gamma_m = 0 \quad \text{для} \quad m < 0.$$

(Доказательство см. в [875], теорема 12.)

В дальнейшем из соображений простоты для тензорного произведения $T^{L^m} \otimes T^{L^{m'}}$ будем пользоваться обозначением $m \otimes m'$.

В качестве примеров рассмотрим два важных класса тензорных произведений представлений GL (n, C).

1° Умножение вектора $\overset{(1)}{m}$ на тензор

$$m' = (m'_1, m'_2, \ldots, m'_n), \quad \min(m'_i - m'_j) \geqslant 1.$$

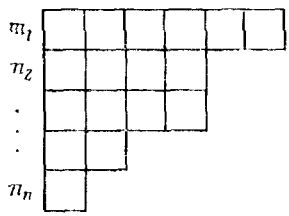
Формула (17) немедленно дает

$$\Gamma_{1,0,\ldots,0} L^{m'} = \hat{\delta}_1 L^{m'} \mid \hat{\delta}_2 L^{m'} \mid \cdots \mid \hat{\delta}_n L^{m'}. \tag{18}$$

Дадим теперь полезное графическое представление этих результатов. Заметим сначала, что с каждым старшим весом

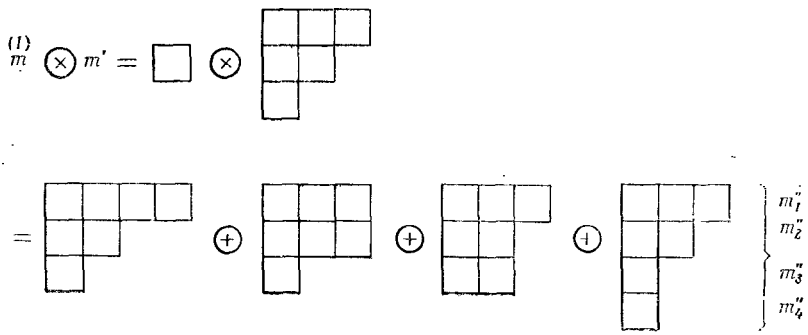
$$m = (m_1, \ldots, m_n), \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n, \tag{19}$$

можно связать следующую диаграмму:



где первая строка содержит m_1 клеток, вторая — m_2 клеток и т. д. Из (19) следует, что длины последующих строк не возрастают, а число строк не превышает n. Такие диаграммы называются допустимыми. Они находятся во взаимно однозначном соответствии со старшими весами неприводимых представлений. Эти диаграммы являются не чем иным, как схемами Юнга, характеризующими неприводимые представления группы перестановок (см. гл. 7, § 5. В).

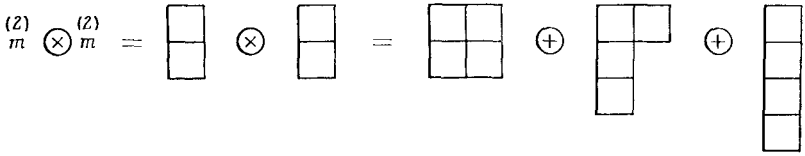
Пользуясь схемами Юнга, мы можем изобразить равенство (18) графически, например, для $m' = (3, 2, 1, 0)$ следующим образом:



2° Тензорное произведение двух поливекторов: пусть $\overset{(i)}{m}$ и $\overset{(k)}{m}$ обозначают связанные с поливекторами старшие веса. Тогда теорема 5 немедленно дает

$$\Gamma_{(\underbrace{111\ldots1}_{i}000\ldots0)}\overset{(k)}{L^m} = \overset{(i)}{L^m}\,\overset{(k)}{L^m} + \overset{(i+1)}{L^m}\,\overset{(k-1)}{L^m} + \cdots + \overset{(i+k)}{L^m}\,L^0. \quad (20)$$

Этот результат также можно изобразить графически при помощи схем Юнга, например



Эти два примера наводят на мысль, что должен существовать графический метод для разложения произвольного тензорного произведения $m \otimes m'$. Действительно, в силу соотношения (16) и того факта, что компонента m_i веса m представляется как длина i-й строки в схеме Юнга, формула (17) дает допустимые схемы Юнга неприводимых представлений, входящих в разложение. Общее правило может быть установлено следующим образом:

Фиксируем схему Юнга, соответствующую старшему весу m, а строки второй схемы нумеруем следующим образом, например

a	a	a	a
b	b	b	
c	c		

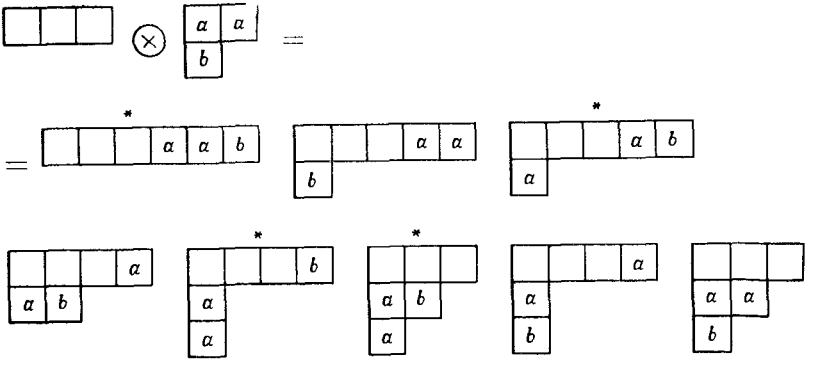
Прибавляем теперь клетки первой строки, нумеруемые a, к первой схеме всеми возможными способами, таким образом, чтобы вновь получать допустимые схемы. Затем ко всем полученным в результате схемам прибавляем клетки второй строки, потом третьей строки и т. д., требуя на каждом шаге, чтобы получающиеся схемы были допустимыми (т. е. $m''_k \geqslant m''_{k-1}$).

Из этого множества схем исключаем те схемы, которые содержат появляющиеся в столбце одинаковые индексы. Затем выбрасываем столбцы длины n. Наконец, упорядочиваем клетки схем: начинаем с первой строки и берем клетки в порядке справа налево. Затем проходим вторую строку справа налево и т. д. Эта упорядоченная последовательность содержит клетки с индексами и пустые клетки. Если оборвать эту последовательность в любой

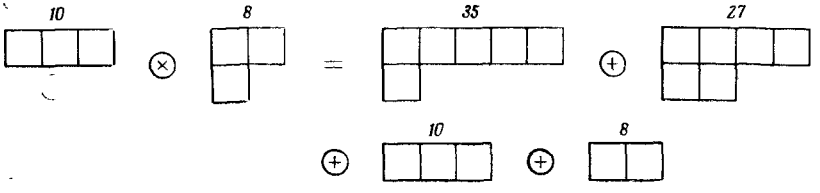
точке, то количество индексов b не должно превосходить количества индексов a, количество индексов c не должно превосходить количества индексов b и т. д., считая от начала и до обрыва.

Получающиеся схемы, которые различаются по форме или по расположению индексов, соответствуют различным неприводимым представлениям, содержащимся в тензорном произведении.

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{SU}(3)$. Рассмотрим тензорное произведение представлений $m = (3, 0)$ и $m' = (2, 1)$. Правило прибавления клеток второй схемы, соответствующей m', к первой схеме, соответствующей m, дает следующий набор схем:



Схемы с символом «*» нашими правилами запрещены. Таким образом, получаем



Над схемами мы проставили размерности получающихся неприводимых представлений, найденные из формулы Вейля (29), приведенной ниже (подробное доказательство этих правил разложения тензорного произведения $m \otimes m'$ см. в [427] или [131]). Ясно, что теорема 1, ввиду теоремы 3.1, верна для $\mathrm{GL}(n, R)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, R)$ и $\mathrm{SU}(n)$.

Общая формула для разложения тензорного произведения неприводимых представлений произвольной полупростой группы Ли G была получена Костантом и Стейнбергом.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть m и m' — два неприводимых представления полупростой группы Ли. Тогда кратность $n_{m''}$ неприводимого представления m'' в тензорном произведении $m \otimes m'$ дается формулой*

$$n_{m''} = \sum_{S,\, T \in W} \det(ST) \cdot P\{S(m+r) + T(m'+r) - (m''+2r)\}, \quad (21)$$

где W — группа Вейля группы G, $r = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha$, а функция разбиения $P(R)$ та же, что и определенная в теореме 4.

(Доказательство см. в [779].)

Использование формулы (21) является затруднительным даже для алгебр Ли низких размерностей. К счастью, Паясом были разработаны специальные компьютерные программы и опубликованы таблицы кратностей для наиболее важных групп [657].

Некоторые разновидности формулы (21) для кратностей были выведены Страуманном [790] и Климыком [466]. Существует также интересный графический метод, разработанный Спейсером [773]. Относительно более поздних работ отсылаем к [350].

Задача разложения тензорного произведения $m \otimes m'$ на неприводимые представления является завершенной, если мы можем указать способ выделения пространства $H^{m''}$, в котором реализовано неприводимое представление m''. Для решения этой задачи достаточно выразить базисные векторы e''_k, $k = 1, 2, \ldots, \dim H^{m''}$, пространства $H^{m''}$ через базисные векторы $e_i e'_j$ пространства $H^m \otimes H^{m'}$ тензорного произведения, т. е.

$$e''_k = c_k^{ij} e_i e'_j. \quad (22)$$

Коэффициенты c_k^{ij} называются *коэффициентами Клебша—Гордана*. Ясно, что они зависят от базисов в пространствах H^m, $H^{m'}$ и $H^{m''}$ соответственно. К сожалению, явный вид коэффициентов Клебша—Гордана известен лишь в нескольких случаях: для SU (2) (см., например, [241]), SL (2, C) (см., например, [313]) и для SU (n), например в [799] для SU (3) и в [759] для SU (n).

Теоремы 5 и 6 были получены при помощи алгебраических методов. Их можно получить также и глобальными методами. Действительно, можно было бы воспользоваться теоремой о тензорном произведении для глобальных индуцированных унитарных неприводимых представлений компактных групп (см. гл. 18, § 2). Затем, пользуясь теоремой 3.1, распространить эти результаты на все некомпактные комплексные и вещественные полупростые группы, связанные с данной компактной группой. Во всех известных случаях этот метод является весьма изящным и эффективным.

Г. *Характеры и размерности представлений*

Характер представления T группы G определяется формулой

$$\chi(\delta) = \mathrm{Tr}\, T_\delta, \quad \delta \text{ — фактор Гаусса для } g = \zeta\, \delta z. \tag{23}$$

Это весьма важное понятие было введено Вейлем. Характер (23) не обладает мультипликативным свойством $\chi(\delta + \delta') = \chi(\delta) \times \times \chi(\delta')$, справедливым для характеров абелевых групп. Вейль получил общую формулу для характеров неприводимых представлений всех простых групп Ли.

Теорема 7. *Пусть* T^{L^m} *— неприводимое представление группы* G, *задаваемое старшим весом* $m = \sum_i f_i m$. *Пусть* $k = r + m$, *где* $r = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_0} \alpha$ *и сумма берется по положительным корням. Положим*

$$\xi(m) = \sum_{s \in W} \det S \exp[\mathrm{i}\,(Sk)\,\delta], \tag{24}$$

где W *— группа Вейля (определенная согласно* (12) *и* (13)), *а* $a\delta = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \cdots + a_n\delta_n$ [1]). *Тогда*

$$\chi^m(\delta) = \frac{\xi(m)}{\xi(0)}. \tag{25}$$

(Доказательство см. в [839].)

Формула (25) дает более простые выражения в случае классических групп. В частности, для GL (n, C) имеем (см. [842], гл. VII, § 6)

$$\chi^m(\delta) = \frac{d(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{d(n-1, n-2, \ldots, 0)}, \tag{26}$$

где $l_i = m_i + n - i$, а $d(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — детерминант

$$\begin{vmatrix} \delta_1^{l_1} & \delta_1^{l_2} & \ldots & \delta_1^{l_n} \\ \delta_2^{l_1} & \delta_2^{l_2} & \ldots & \delta_2^{l_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_n^{l_1} & \delta_n^{l_2} & \ldots & \delta_n^{l_n} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Ясно, что формула (26) дает характер также для всех вещественных форм группы GL (n, C) и, в частности, для $U(n)$. В этих случаях $T_\delta = \exp(\mathrm{i}\delta_j H_j)$, где H_j — генераторы подалгебры Картана.

---

[1]) $Sm = m - \frac{2m \cdot r}{r \cdot r} r$ является отражением весового вектора m относительно гиперплоскости, нормальной к r.

Явный вид характеров для симплектических и ортогональных групп был дан также Вейлем [842], гл. VI, § 8 и 9 соответственно.

Формулу (25) для характеров можно использовать для вычисления размерности N^m неприводимого представления T^{L^m} группы G.

Действительно, поскольку

$$N^m = \chi^m(e), \tag{28}$$

то размерность T^{L^m} получается предельным переходом $\delta \to e$. Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.

$$N^m = \frac{\prod\limits_{\alpha>0} (\alpha, r+m)}{\prod\limits_{\alpha>0} (\alpha, r)}, \tag{29}$$

где умножение берется по всем положительным корням.

(Доказательство см. в [840].)

Формула (29) в случае GL (n, C) (и, в частности, для $U(n)$) приобретает вид

$$N^m = \frac{\prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)}{\prod\limits_{i<j} (l_i^0 - l_j^0)}, \tag{30}$$

где $l_j = m_j + n - j$ и $l_j^0 = m_j - j$.

Д. *Комментарии*

Доказательство теоремы Ли в представленной здесь форме было получено Годеманом. Свойства представлений полупростых групп Ли исследовались Картаном [154] и Вейлем [840—842]. Возможность использования теоремы Ли в качестве средства для глобальной классификации неприводимых представлений полупростых групп Ли была продемонстрирована Годеманом. Этот подход был использован и распространен на произвольные группы Ли Желобенко [874, 875]. Здесь мы следовали подходу Желобенко.

Заметим, что всякое неприводимое представление полупростой группы Ли G индуцируется характером подгруппы D. В гл. 19 мы показываем, что бесконечномерные представления простых комплексных групп Ли также индуцируются комплексным характером L подгруппы D.