Глава 9

Тензорные операторы, обертывающие алгебры и обертывающие поля

Тензорные операторы $\{T_a\}$ и тензорно-полевые операторы $\{T_a(x)\}$, сопоставляемые с представлениями групп, играют существенную роль в квантовой теории. Такие физические величины как угловой момент J, четыре-вектор энергии-импульса P_μ, спин, поля и токи, отождествляются с объектами этого вида. Описание большинства физических явлений в квантовой теории сводится, следовательно, к анализу свойств определенных тензорных операторов.

В § 1 мы описываем основные свойства тензорных операторов и выводим теорему Вигнера—Эккарта.

В § 2 мы рассматриваем основные свойства обертывающей алгебры, которая в принципе является алгеброй тензорных операторов. Свойства инвариантных операторов, которые фактически являются простейшими тензорными операторами, даны в § 3.

Если данная группа G является группой симметрии некоторой физической системы, то спектры инвариантных операторов, сопоставляемых G, определяют наблюдаемые квантовые числа физической системы. Следовательно, с точки зрения физических приложений мы заинтересованы в том, чтобы найти в явном виде

1) множество $\{C_p\}$ независимых инвариантных операторов, которые порождают кольцо инвариантных операторов в обертывающей алгебре E алгебры Ли L группы G;

2) спектры этих независимых инвариантных операторов C_p.

В § 4 мы даем явное решение этих двух задач для всех классических простых групп Ли.

Наконец, в § 5 мы рассматриваем важное понятие обертывающего поля алгебры Ли и, в частности, знаменитую теорему Гельфанда—Кириллова о генераторах обертывающего поля.

§ 1. Тензорные операторы

В квантовой теории атомной и ядерной спектроскопии появляются множества операторов $\{T^J_m\}$, $m = -J, \quad -J+1, \ldots$ $\ldots, J-1, J$, которые преобразуются под действием группы вращений SO (3) как сферические гармоники $Y^J_m(\theta, \varphi)$ (или как векторы состояний), т. е.[1])

$$U_g^{-1} T^J_m U_g = D^J_{mm'}(g)\, T^J_{m'}. \tag{1}$$

[1]) Мы используем определение тензорного оператора, данное в [854].

Это приводит к введению в математической физике понятия тензорных операторов. Теперь мы дадим общее определение. Поскольку мы будем иметь дело с некомпактными группами, мы делаем различие между контравариантными $\{T^a\}$ и ковариантными $\{T_a\}$ тензорными операторами.

Определение 1. Пусть $g \to D(g)$ — конечномерное представление группы G в векторном пространстве V, и пусть $\{D^a_b\}$ — его матричная форма в базисе $\{e_a\}_1^{\dim V}$ пространства V. Пусть $g \to U_g$ — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H.

Множество $\{T^a\}$, $a = 1, 2, \ldots, \dim D$, операторов называется *контравариантным тензорным оператором*, если

$$U_g^{-1} T^a U_g = D^a_b(g)\, T^b, \tag{2}$$

где $\{D^a_b(g)\}$ — матричная форма представления $g \to D(g)$ в V.

Итак, контравариантный тензорный оператор $\{T^a\}$ в H преобразуется как контравариантный вектор относительно представления $g \to D(g)$ в V.

Соответствующее определение тензорного оператора на уровне алгебры Ли получается при подстановке представления генераторов

$$D(X) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} D(\exp \Theta X)\,|_{\Theta=0}, \quad \mathrm{i}U(X) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} U_{\exp \Theta X}\,|_{\Theta=0} \tag{3}$$

в формулу (2). Мы находим

$$[U(X),\ T^a] = \mathrm{i}D^a_b(X)\, T^b, \quad X \in L. \tag{4}$$

Замечание 1. Мы будем предполагать, что генераторы $U(X)$, $X \in L$, имеют общую плотную инвариантную область определения $D \subset H$. Построение таких областей определения и точные определения генераторов (3) даются в гл. 11, § 1. Мы будем предполагать, что D является областью определения для операторов T^a. В этой главе мы сосредоточим внимание на алгебраических свойствах тензорных операторов, так что конкретный вид области D не имеет значения.

В общем определения (2) и (4) тензорного оператора эквивалентны, если представление алгебры Ли L группы G может быть получено из глобального представления U_g группы G путем дифференцирования. Поучительно показать также, что из (4) следует (2). Используемый здесь метод применим для многих практических вычислений. Пусть глобальное представление $g \to U_g$ задано формулой

$$U_g = \exp(\mathrm{i}s_\rho U(X_\rho)),$$

где представления генераторов мы обозначили через $U(X_\rho)$. Рассмотрим «однопараметрическую» подгруппу глобального представления $U_{g(\lambda)} = \exp(i\lambda s_\rho U(X_\rho))$. Положим

$$\boldsymbol{T}'^a(\lambda) = U^{-1}_{g(\lambda)} \boldsymbol{T}^a U_{g(\lambda)} \tag{5}$$

и продифференцируем это равенство по λ:

$$\frac{d\boldsymbol{T}'^a(\lambda)}{d\lambda} = -is_\rho \exp(-i\lambda s_\rho U(X_\rho))[U(X_\rho), \boldsymbol{T}^a]\exp(i\lambda s_\rho U(X_\rho)).$$

Используя (4) и (5), получаем

$$\frac{d\boldsymbol{T}'^a}{d\lambda} = s_\rho D^a_b(X_\rho)\boldsymbol{T}'^b(\lambda).$$

Это дифференциальное уравнение с начальными условиями $\boldsymbol{T}'^a(0) = \boldsymbol{T}^a$ имеет следующее решение:

$$\boldsymbol{T}'^a(\lambda) = [\exp(\lambda s_\rho D(X))]^a_b \boldsymbol{T}'^b.$$

В силу (5) при $\lambda = 1$ мы получаем формулу (2).

Говорят, что тензорный оператор $\{\boldsymbol{T}^{(s)a}\}$ *неприводим*, если $g \to D^{(s)}(g)$ неприводимо. Простейший пример неприводимого тензорного оператора дается любым инвариантным оператором $\boldsymbol{C}$ группы G. В этом случае

$$U_g^{-1}\boldsymbol{C}U_g = \boldsymbol{C},$$

т. е. $g \to D(g) \equiv 1$. Следующий пример менее тривиален.

Пример 1. Пусть G — группа вращений в R^n, $H = L^2(R^n)$ и $(U_g\psi)(x) = \psi(g^{-1}x)$. Пусть $\boldsymbol{T}^\mu = \hat{\boldsymbol{x}}^\mu$ — оператор координаты $(\hat{\boldsymbol{x}}^\mu\psi)(x) = x^\mu\psi(x)$. Тогда

$$(U_g^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}^\mu U_g\psi)(x) = (\hat{\boldsymbol{x}}^\mu U_g\psi)(gx) = g^\mu_\nu x^\nu (U_g\psi)(gx) =$$
$$= g^\mu_\nu x^\nu \psi(x) = g^\mu_\nu \hat{\boldsymbol{x}}^\nu \psi(x).$$

Поэтому

$$U_g^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}^\mu U_g = g^\mu_\nu \hat{\boldsymbol{x}}^\nu, \tag{6}$$

т. е. множество $\{\hat{\boldsymbol{x}}^\mu\}$ является контравариантным тензорным оператором.

Определение 2. Множество $\{\boldsymbol{T}_a\}$, $a = 1, 2, \ldots, \dim D$, операторов называется *ковариантным тензорным оператором*, если оно преобразуется по представлению $\check{D}(g) = D^T(g^{-1})$, контраградиентному $D(g)$, т. е.

$$U_g^{-1}\boldsymbol{T}_a U_g = D_a^{Tb}(g^{-1})\boldsymbol{T}_b \equiv D^b_a(g^{-1})\boldsymbol{T}_b. \tag{7}$$

На уровне алгебры Ли соотношения (7) и (3) дают

$$[U(X),\ T_a] = -\mathrm{i}D_a^b(X)\,T_b. \tag{8}$$

Замечание 1 применимо также к определению 2.

Если $g \to D(g)$ — унитарное представление группы G, то пространство V имеет метрический тензор $g^{ab} = \delta^{ab}$. Следовательно, мы можем положить $D_b^a(g) = D_{ab}(g)$ во всех формулах. Мы видим, что стандартное определение тензорного оператора T_m^j для SO (3), заданное формулой (1), соответствует определению 1 контравариантного тензорного оператора.

Пусть L — произвольная алгебра Ли с базисом X_a, и пусть $X_a \to U(X_a)$ — представление алгебры L самосопряженными операторами в H. Тогда множество $\{T_a\} = \{U(X_a)\}$, $a = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \dim L$, является ковариантным тензорным оператором для L. В самом деле, в силу соотношений коммутации в L мы имеем для этого специального тензорного оператора

$$[U(X_b),\ T_a] = \mathrm{i}c_{ba}^c T_c. \tag{9}$$

Множество матриц $D(X_a) = -C_a \equiv \|-c_{ab}^c\|$ задает представление алгебры L в силу тождества Якоби (1.1.7). Поэтому условие (8) удовлетворено. Итак, множество $\{U(X_a)\}$ является ковариантным тензорным оператором.

Для произвольных тензорных операторов $\{\boldsymbol{Q}_a\}$ и $\{\boldsymbol{T}^a\}$ оператор $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{T}^a$ является инвариантом. В самом деле,

$$U_g^{-1}\boldsymbol{C}U_g = D_a^b(g^{-1})\,D_{b'}^a(g)\,\boldsymbol{Q}_b\boldsymbol{T}^{b'} = D_{b'}^b(g^{-1}g)\,\boldsymbol{Q}_b\boldsymbol{T}^{b'} = \delta_{b'}^b\boldsymbol{Q}_b\boldsymbol{T}^{b'} = \boldsymbol{C}, \tag{10}$$

или

$$[\boldsymbol{C},\ U(X_a)] = 0. \tag{10'}$$

Это дает удобный метод построения инвариантов алгебры Ли, который мы часто используем ниже.

Определение 3. Множество $\{\boldsymbol{T}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\}$ называется *контравариантным тензорным оператором ранга r*, если

$$U_g^{-1}\boldsymbol{T}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}U_g = D_{\nu_1}^{\mu_1}(g)\,D_{\nu_2}^{\mu_2}(g)\ \cdots\ D_{\nu_r}^{\mu_r}(g)\,\boldsymbol{T}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_r}. \tag{11}$$

Аналогично определяются ковариантные тензорные операторы $\left\{\boldsymbol{T}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\right\}$ и *смешанные тензорные операторы* $\left\{\boldsymbol{T}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}\right\}$.

Замечание 2. Не каждое множество операторов $\{T_a\}$, которое имеет тензорный индекс a, представляет собой тензорный оператор. Важным контрпримером являются генераторы группы Пуан-

каре. В самом деле, под действием группы Пуанкаре генераторы $\boldsymbol{P}_\mu$ преобразуются следующим образом:

$$[U^{-1}_{(a\Lambda)}\boldsymbol{P}_\mu U_{(a\Lambda)}\psi](p) = (\boldsymbol{P}_\mu U_{(a\Lambda)})\exp(-\mathrm{i}pa)\,\psi(\Lambda p) =$$
$$= (\Lambda)^\nu_\mu p_\nu \exp(\mathrm{i}pa)\,(U_{(a\Lambda)})\,\psi(\Lambda p) =$$
$$= \Lambda^\nu_\mu \boldsymbol{P}_\nu \psi(p) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \boldsymbol{P}_\nu \psi(p),$$

т. е.

$$U^{-1}_{(a\Lambda)}\boldsymbol{P}_\mu U_{(a\Lambda)} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \boldsymbol{P}_\nu. \tag{11'}$$

Таким образом, $\boldsymbol{P}_\mu$ преобразуется по контраградиентному представлению группы Пуанкаре, заданному формулой

$$(a,\ \Lambda) \to (0,\ \Lambda)^{-1^T} = (0,\ \Lambda^{-1^T}),$$

т. е., согласно определению 2, $\boldsymbol{P}_\mu$ — ковариантный тензорный оператор. С другой стороны, коммутационные соотношения генераторов $M_{\mu\nu}$, например с $\boldsymbol{P}_\mu$ дают

$$[\boldsymbol{P}_\sigma,\ M_{\mu\nu}] = \mathrm{i}\,(g_{\mu\sigma}\boldsymbol{P}_\nu - g_{\nu\sigma}\boldsymbol{P}_\mu).$$

Следовательно, множество $\{M_{\mu\nu}\}$ не может образовывать тензорный оператор для группы Пуанкаре П согласно определениям (4) и (8). Однако множество $\{\boldsymbol{P}_\mu,\ \boldsymbol{M}_{\mu\nu}\}$ образует тензорный оператор согласно (9).

Определение 4. Ковариантный тензор $\{g_{\mu_1\ldots\mu_p}\}$ в V называется *инвариантным*, если он удовлетворяет условию

$$D^{\nu_1}_{\mu_1}(g)\ \ldots\ D^{\nu_p}_{\mu_p}(g)\,g_{\nu_1\ldots\nu_p} = g_{\mu_1\ldots\mu_p}. \tag{12}$$

Символ Кронекера δ_{ij} и символ Леви—Чивита ε_{ijk} — единственные инвариантные тензоры в R^3 по отношению к SO (3).

Следующая теорема описывает некоторые важные свойства тензорных операторов.

Теорема 1. 1° *Свертка* $\left\{\boldsymbol{T}^{\mu_1\ldots\mu_s\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\mu_1\ldots\mu_s\beta_1\ldots\beta_q}\right\}$ *тензорного оператора* $\left\{\boldsymbol{T}^{\nu_1\ldots\nu_s\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\mu_1\ldots\mu_s\beta_1\ldots\beta_q}\right\}$ *снова является тензорным оператором.*

2° *Если* $\{\boldsymbol{T}^{\mu_1\ldots\mu_p}\}$ — *тензорный оператор, который преобразуется по тензорному произведению* $D\otimes\ldots\otimes D$ *представлений* $g\to D(g)$, *а* $g_{\mu_1\ldots\mu_p}$ — *ковариантный инвариантный тензор относительно контраградиентного представления* $\check{D}(g) = D^T(g^{-1})$, *то оператор*

$$\boldsymbol{T} = g_{\mu_1\ldots\mu_p}\boldsymbol{T}^{\mu_1\ldots\mu_p}$$

является инвариантом группы G, т. е.

$$U_g^{-1}\boldsymbol{T}U_g = \boldsymbol{T}.$$

Доказательство. 1°. Это утверждение следует из (10).
2°. Используя (11) и (12), получаем

$$U_g^{-1} T U_g = g_{\mu_1 \ldots \mu_p} D^{\mu_1}_{\nu_1}(g) \cdots D^{\mu_p}_{\nu_p}(g) T^{\nu_1 \ldots \nu_p} =$$

$$= g_{\nu_1 \ldots \nu_p} T^{\nu_1 \ldots \nu_p} = T.$$

Если $\{\overset{1}{T}{}^a\}$ и $\{\overset{2}{T}{}^a\}$, $a = 1, 2, \ldots, \dim D$, — два контравариантных тензорных оператора, которые удовлетворяют соотношению (2), то, согласно определению 1,

$$T^a = \overset{1}{T}{}^a + \overset{2}{T}{}^a$$

также контравариантный тензорный оператор того же вида.

Если $\{\overset{1}{T}{}^a\}$ и $\{\overset{2}{T}{}^a\}$ — два контравариантных тензорных оператора, которые преобразуются по представлениям $\overset{1}{D}$ и $\overset{2}{D}$ соответственно, то множество $\{T^{ab} = \overset{1}{T}{}^a \overset{2}{T}{}^b\}$ определяет контравариантный тензорный оператор, который преобразуется так:

$$U_g^{-1} T^{ab} U_g = D^{ab}_{a'b'}(g) T^{a'b'}, \tag{11''}$$

где

$$D^{ab}_{a'b'}(g) = D^a_{a'}(g) D^b_{b'}(g).$$

Тензорный оператор $\{T^{ab}\}$ называется *тензорным произведением* тензорных операторов $\{\overset{1}{T}{}^a\}$ и $\{\overset{2}{T}{}^b\}$.

Из тензорного произведения двух неприводимых тензорных операторов $\{T^{\lambda_1}_{m_1}\}$ и $\{T^{\lambda_2}_{m_2}\}$ можно образовать новый неприводимый тензорный оператор. Мы покажем эту конструкцию для того случая, когда G — *просто приводимая компактная группа* [1]). Поскольку каждое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению, мы будем использовать только нижние индексы.

Пусть $\{|\lambda_1; m_1\rangle\}$ — базис в неприводимом пространстве H^{λ_1}, $\{|\lambda_2; m_2\rangle\}$ — базис в неприводимом пространстве H^{λ_2} и $\{|\lambda_1\lambda_2\lambda m\rangle\}$ — ортонормальный базис в неприводимом подпространстве H^{λ} пространства $H^{\lambda_1} \otimes H^{\lambda_2}$. Положим

$$T^{\lambda}_{m} = \sum_{m_1 m_2} \langle \lambda_1\lambda_2\lambda m | \lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2\rangle T^{\lambda_1}_{m_1} T^{\lambda_2}_{m_2}, \tag{13}$$

где

$$|\lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2\rangle \equiv |\lambda_1 m_1\rangle |\lambda_2 m_2\rangle. \tag{14}$$

---

[1]) Компактная группа *просто приводима*, если в разложении тензорного произведения любых двух неприводимых представлений каждая неприводимая компонента появляется не более одного раза.

Используя соотношение (1) для $T^{\lambda_1}_{m_1}$ и $T^{\lambda_2}_{m_2}$, имеем

$$U_g^{-1} T^{\lambda}_{m} U_g = \sum \langle \lambda_1 \lambda_2 \lambda m \,|\, \lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2 \rangle D^{\lambda_1}_{m_1 m_1'}(g) D^{\lambda_2}_{m_2 m_2'}(g) T^{\lambda_1}_{m_1'} T^{\lambda_2}_{m_2'}. \tag{15}$$

Согласно упражнению 7.3.3.1,

$$D^{\lambda_1}_{m_1 m_1'}(g) D^{\lambda_2}_{m_2 m_2'}(g) =$$

$$= \sum_{\tilde{\lambda}=|\lambda_1-\lambda_2|}^{\lambda_1+\lambda_2} \langle \lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2 \,|\, \lambda_1 \lambda_2 \tilde{\lambda} \tilde{m} \rangle D^{\tilde{\lambda}}_{m \tilde{m}_1}(g) \langle \lambda_1 \lambda_2 \tilde{\lambda} \tilde{m}_1 \,|\, \lambda_1 m_1' \lambda_2 m_2' \rangle. \tag{16}$$

Подставляя это выражение в (15) и используя соотношения полноты и ортогональности для векторов $|\lambda_1 m_1 \lambda_2 m_2\rangle$ и $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda m\rangle$ соответственно, получаем

$$U_g^{-1} T^{\lambda}_{m} U_g = D^{\lambda}_{m m'}(g) T^{\lambda}_{m'}.$$

Поэтому выражение (13) является неприводимым тензорным оператором.

Следующая теорема описывает основное свойство неприводимого тензорного оператора, весьма полезное для приложений.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Вигнера—Эккарта). *Пусть $U_g^{\lambda_1}$ и $U_g^{\lambda_2}$ — неприводимые унитарные представления просто приводимой компактной группы G в гильбертовых пространствах H^{λ_1} и H^{λ_2} соответственно. Пусть $\{|\lambda_1 m_1\rangle\}$ и $\{|\lambda_2 m_2\rangle\}$ — ортогональные множества базисных векторов в H^{λ_1} и H^{λ_2}. Пусть $\{T^{\lambda}_{m}\}$ — неприводимый тензорный оператор. Тогда*

$$\langle \lambda_2 m_2 | T^{\lambda}_{m} | \lambda_1 m_1 \rangle = \langle \lambda \lambda_1 \lambda_2 m_2 \,|\, \lambda m \lambda_1 m_1 \rangle T(\lambda, \lambda_1, \lambda_2), \tag{17}$$

где $\langle \lambda \lambda_1 \lambda_2 m_2 \,|\, \lambda m \lambda_1 m_1 \rangle$ — *коэффициент Клебша—Гордана, а* $T(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ — *так называемый приведенный матричный элемент тензорного оператора* $\{T^{\lambda}_{m}\}$, *задаваемый формулой*

$$T(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{d_{\lambda_2}} \sum_{n_1, n_2} \langle \lambda n \lambda_1 n_1 \,|\, \lambda \lambda_1 \lambda_2 n_2 \rangle \langle \lambda_2 n_2 | T^{\lambda}_{n} | \lambda_1 n_1 \rangle, \tag{18}$$

и d_{λ_2} — *размерность представления* T^{λ_2}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7) мы имеем

$$\langle \lambda_2 m_2 | T^{\lambda}_{m} | \lambda_1 m_1 \rangle = \sum_{n} D^{\lambda}_{nm}(g) \langle \lambda_2 m_2 | U_g^{-1} T^{\lambda}_{n} U_g | \lambda_1 m_1 \rangle. \tag{19}$$

Используя равенство $U_g |\lambda m\rangle = D^{\lambda}_{nm}(g) |\lambda n\rangle$, получаем

$$\langle \lambda_2 m_2 | T^{\lambda}_{m} | \lambda_1 m_1 \rangle = \sum_{n, n_1, n_2} \overline{D^{\lambda_2}_{n_2 m_2}(g)} D^{\lambda}_{nm}(g) D^{\lambda_1}_{n_1 m_1}(g) \langle \lambda_2 n_2 | T^{\lambda}_{n} | \lambda_1 n_1 \rangle. \tag{20}$$

Интегрируя по групповому пространству G и используя соотношения (7.4.10) и (7.4.11), находим

$$\langle \lambda_2 m_2 | T^{\lambda}_m | \lambda_1 m_1 \rangle =$$
$$= \langle \lambda\lambda_1\lambda_2 m_2 | \lambda m \lambda_1 m_1 \rangle d^{-1}_{\lambda_2} \sum_{n,\, n_1,\, n_2} \langle \lambda n \lambda_1 n_1 | \lambda\lambda_1\lambda_2 n_2 \rangle \langle \lambda_2 n_2 | T^{\lambda}_n | \lambda_1 n_1 \rangle. \quad (21)$$

Это дает утверждение теоремы.

Замечание. Если G — не просто приводима, то в силу того факта, что в тензорном произведении $U^{\lambda_1} \otimes U^{\lambda_2}$ неприводимое представление U^{λ} может появиться более чем один раз, т. е.

$$U^{\lambda_1} \otimes U^{\lambda_2} = \sum_{\lambda} \oplus c_{\lambda} U^{\lambda}, \quad c_{\lambda} \geqslant 1,$$

могут возникнуть осложнения. В этом случае фактор-представление $c_{\lambda} U^{\lambda}$ следует разбить на неприводимые компоненты, используя формализм из раздела 7.4.А, и продолжать так же как выше. Однако в противоположность общему мнению даже в случае группы $U(n)$, $n > 3$, при выводе теоремы Вигнера—Эккарта встречаются значительные трудности (см. [419]).

Во многих приложениях мы интересуемся отношением матричных элементов (17) тензорного оператора $\{T^{\lambda}_m\}$. В этом случае для фиксированных инвариантных чисел λ, λ_1 и λ_2 (17) дает

$$\frac{\langle \lambda_2 m_2 | T^{\lambda}_m | \lambda_1 m_1 \rangle}{\langle \lambda_2 m'_2 | T^{\lambda}_{m'} | \lambda_1 m'_1 \rangle} = \frac{\langle \lambda\lambda_1\lambda_2 m_2 | \lambda m \lambda_1 m_1 \rangle}{\langle \lambda\lambda_1\lambda_2 m'_2 | \lambda m' \lambda_1 m'_1 \rangle}, \quad (22)$$

т. е. задача сводится к вычислению отношений коэффициентов Клебша—Гордана.

Заметим также, что для фиксированных инвариантных чисел λ, λ_1, λ_2 (17) позволяет вычислить произвольный матричный элемент оператора T^{λ}_m, если известен любой частный матричный элемент.

Если тензорный оператор $\{T_a\}$ зависит от координат x, то определяются более общие объекты. Такие объекты часто встречаются в квантовой теории поля и называются *тензорно-полевыми операторами*. Трансформационные свойства тензорно-полевых операторов определяются формулой

$$U^{-1}_g T^{\mu}(x) U_g = D^{\mu}_{\nu}(g)\, T^{\nu}(g^{-1}x). \quad (23)$$

В частности, если G — группа Пуанкаре, $\{x\} = M$ — пространство Минковского, а $T(x)$ — оператор скалярного поля, то формула (23) дает

$$U^{-1}_{(a\Lambda)} T(x) U_{(a\Lambda)} = T(\Lambda^{-1}(x-a)). \quad (24)$$

Примером тензорно-полевых операторов могут служить токи $\{j^{\mu}_k(x)\}$, которые преобразуются по прямому произведению $G \otimes \Pi$ группы внутренних симметрий G (как, например, SU (2) или

SU (3)) и группы Пуанкаре П. Трансформационные свойства операторов $\{j_k^\mu(x)\}$ имеют вид

$$U_g^{-1} j_k^\mu(x) U_g = D_{k'k}(g^{-1}) j_{k'}^\mu(x), \quad g \in G, \tag{25}$$

и

$$U_{(a\Lambda)}^{-1} j_k^\mu(x) U_{(a\Lambda)} = (\Lambda)_\nu^\mu j_k^\nu(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad (a, \Lambda) \in \Pi. \tag{26}$$

§ 2. Обертывающая алгебра

Пусть L — алгебра Ли над $K = R$ или C. Пусть τ — (свободная) тензорная алгебра над L, рассматриваемая как векторное пространство, т. е.

$$\tau = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \tau^r = K \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \ldots . \tag{1}$$

Векторное пространство τ является ассоциативной алгеброй с абстрактным законом умножения, заданным тензорным произведением $\otimes$. Пусть J — двусторонний идеал в τ, порожденный элементами вида

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad \text{где} \quad X, Y \in L. \tag{2}$$

Тогда фактор-алгебра $E = \tau/J$ называется *универсальной накрывающей алгеброй* алгебры Ли L. Ясно, что обертывающая алгебра ассоциативна.

Пусть π: $Z \to Z + J \equiv \tilde{Z}$, $\tilde{Z} \in E$, обозначает каноническое отображение (т. е. естественный гомоморфизм) из τ на E. Ясно, что $\pi(Z_1 \otimes Z_2) = \pi(Z_1)\pi(Z_2) = \tilde{Z}_1\tilde{Z}_2$ [1]). Векторное подпространство в E, натянутое на элементы $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}$, $X_{i_k} \in L$, порядка r будет обозначаться через E^r. Элемент

$$([\pi(X), \pi(Y)] - \pi[X, Y]), \quad X, Y \in L, \tag{3}$$

является образом элемента (2) при каноническом отображении и, следовательно, равен нулю. Ясно, что каноническое отображение π алгебры τ на E индуцирует линейное отображение из L в E.

Пусть $X \to T(X)$ — представление алгебры Ли в векторном пространстве H. Формула

$$T(X_{i_1} \otimes X_{i_2} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}) = T(X_{i_1}) T(X_{i_2}) \cdots T(X_{i_r}) \tag{4}$$

однозначно определяет представление $\tilde{T}$ ассоциативной алгебры [2])

---

[1]) Для простоты мы будем опускать символ умножения в E.

[2]) Построение плотной инвариантной области определения для операторов (4) дано в гл. 11, § 2.