SU (3)) и группы Пуанкаре П. Трансформационные свойства операторов $\{j_k^\mu(x)\}$ имеют вид

$$U_g^{-1} j_k^\mu(x) U_g = D_{k'k}(g^{-1}) j_{k'}^\mu(x), \quad g \in G, \tag{25}$$

и

$$U_{(a\Lambda)}^{-1} j_k^\mu(x) U_{(a\Lambda)} = (\Lambda)_\nu^\mu j_k^\nu(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad (a, \Lambda) \in \Pi. \tag{26}$$

## § 2. Обертывающая алгебра

Пусть $L$ — алгебра Ли над $K = R$ или $C$. Пусть $\tau$ — (свободная) тензорная алгебра над $L$, рассматриваемая как векторное пространство, т. е.

$$\tau = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \tau^r = K \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \ldots . \tag{1}$$

Векторное пространство $\tau$ является ассоциативной алгеброй с абстрактным законом умножения, заданным тензорным произведением $\otimes$. Пусть $J$ — двусторонний идеал в $\tau$, порожденный элементами вида

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad \text{где} \quad X, Y \in L. \tag{2}$$

Тогда фактор-алгебра $E = \tau/J$ называется *универсальной накрывающей алгеброй* алгебры Ли $L$. Ясно, что обертывающая алгебра ассоциативна.

Пусть $\pi$: $Z \to Z + J \equiv \tilde{Z}$, $\tilde{Z} \in E$, обозначает каноническое отображение (т. е. естественный гомоморфизм) из $\tau$ на $E$. Ясно, что $\pi(Z_1 \otimes Z_2) = \pi(Z_1)\pi(Z_2) = \tilde{Z}_1\tilde{Z}_2$ [1]). Векторное подпространство в $E$, натянутое на элементы $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}$, $X_{i_k} \in L$, порядка $r$ будет обозначаться через $E^r$. Элемент

$$([\pi(X), \pi(Y)] - \pi[X, Y]), \quad X, Y \in L, \tag{3}$$

является образом элемента (2) при каноническом отображении и, следовательно, равен нулю. Ясно, что каноническое отображение $\pi$ алгебры $\tau$ на $E$ индуцирует линейное отображение из $L$ в $E$.

Пусть $X \to T(X)$ — представление алгебры Ли в векторном пространстве $H$. Формула

$$T(X_{i_1} \otimes X_{i_2} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}) = T(X_{i_1}) T(X_{i_2}) \cdots T(X_{i_r}) \tag{4}$$

однозначно определяет представление $\tilde{T}$ ассоциативной алгебры [2])

---

[1]) Для простоты мы будем опускать символ умножения в $E$.

[2]) Построение плотной инвариантной области определения для операторов (4) дано в гл. 11, § 2.

$E$ в $H$. Ясно, что $\tilde{T}(X) = T(X)$ для $X$ из $L$. Более того,

$$\tilde{T}(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) =$$
$$= T(X)T(Y) - T(Y)T(X) - T([X, Y]) = 0.$$

Таким образом, каждое представление $T$ алгебры $L$ может быть расширено до представления $\tilde{T}$ универсальной обертывающей алгебры $E$ алгебры $L$.

*Базисы в обертывающей алгебре*

Мы построим два удобных базиса в $E$. Заметим сначала, что если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — базис в $L$, то на одночлены

$$\tilde{X}_{i_1}\tilde{X}_{i_2} \cdots \tilde{X}_{i_r}, \quad \tilde{X}_{i_k} = \pi(X_{i_k}), \tag{5}$$

натягивается пространство $E^r$. Используя соотношение $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = c_{ik}^l \tilde{X}_l$ для базисных элементов алгебры $L$ в $E$, мы можем привести (5) к стандартному одночленному виду

$$e_{j_1 j_2 \ldots j_r} = \tilde{X}_{j_1}\tilde{X}_{j_2} \cdots \tilde{X}_{j_r}, \quad \text{где} \quad j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_r \tag{6}$$

(с точностью до введенных элементов (5) из $E^{r-1}$). Тогда элементы (5) из $E^{r-1}$ в свою очередь могут быть сведены к стандартному виду (6). Таким образом, вместо $n^r$ элементов, на которые натягивается $E^r$, мы получаем

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} \tag{7}$$

элементов, на которые натягивается $E^r$. Например, пространство $R^3$, сопоставляемое с алгеброй Ли su (2), содержит 10 базисных элементов вида (6) вместо 27 элементов вида (5). Взяв набор векторов (6) из $E^0, E^1, E^2, \ldots$, мы получаем множество $\{e_{i_1 i_2 \ldots i_r};\ i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots\}$, на которое натягивается $E$. Мы оставляем как упражнение для читателя доказательство того факта, что элементы (6) линейно независимы. Базис (6) в $E$ называется *базисом Пуанкаре—Биркгофа—Витта*. Элементы (6) могут быть также записаны в виде $e_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \tilde{X}_1^{k_1}\tilde{X}_2^{k_2} \ldots \tilde{X}_n^{k_n}$, где $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$.

В приложениях удобно использовать следующий симметрический базис в $E$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть $L$ — алгебра Ли с базисом $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Элементы*

$$e_{\{i_1 i_2 \ldots i_r\}} \equiv \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \tilde{X}_{i_{\sigma(1)}} \cdots \tilde{X}_{i_{\sigma(r)}}, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

*где* $i_k = 1, 2, \ldots, \dim L$ *и* $\sigma$ *пробегает все перестановки множества* $(1, 2, \ldots, r)$, *образуют базис в универсальной обертывающей алгебре* $E$ *алгебры* $L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы

$$\tilde{X}_{i_1} \cdots \tilde{X}_{i_r} - \tilde{X}_{i_{\sigma(1)}} \cdots \tilde{X}_{i_{\sigma(r)}} \tag{9}$$

из $E^r$ можно выразить через элементы из $E^{r-1}$, если использовать коммутационные соотношения $\tilde{X}_i\tilde{X}_k = \tilde{X}_k\tilde{X}_i + c_{ik}^l\tilde{X}_l$. Если просуммировать (9) по всем перестановкам $\sigma$, то получим

$$\tilde{X}_{i_1} \cdots \tilde{X}_{i_r} = e_{\{i_1 \ldots i_r\}} + \text{выражения из } E^{r-1}.$$

Повторяя теперь этот процесс для выражений из $E^{r-1}$, $E^{r-2}$ и т. д., находим

$$\tilde{X}_{i_1} \cdots \tilde{X}_{i_r} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k=1 \\ 0 \leqslant k \leqslant r}}^{\dim L} c^{i_1 \ldots i_k} e_{\{i_1 \ldots i_k\}}. \tag{10}$$

Отображение $\sigma$: $e_{i_1 i_2 \ldots i_r} \leftrightarrow e_{\{i_1 i_2 \ldots i_r\}}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между базисными элементами (6) и симметрическими элементами (8). Поэтому элементы (8) также образуют базис в $E$.

*Центром* $Z$ универсальной обертывающей алгебры $E$ является множество всех элементов $C$ в $E$, которые удовлетворяют условию

$$[C, \tilde{X}] = 0 \quad \text{для всех } \tilde{X} \text{ из } L. \tag{11}$$

Одной из основных задач теории представлений является нахождение центра $Z$ и определение спектра элементов из $Z$ в пространствах представлений. Для полупростых алгебр Ли эта задача решается явно в § 4 и в § 6, А.

## § 3. Инвариантные операторы

Мы описываем здесь общие свойства инвариантных операторов произвольных алгебр Ли.

Согласно (2.6), любой элемент обертывающей алгебры $E$ заданной алгебры Ли $L$ может быть записан как сумма элементов вида [1])

$$g^{i_1 \ldots i_s} X_{i_1} \cdots X_{i_s}, \quad s = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

---

[1]) В дальнейшем для простоты произведение $\tilde{X}_{i_1} \ldots \tilde{X}_{i_s}$ обозначаем как $X_{i_1} \ldots X_{i_s}$.