алгебры L, определенного старшим весом m. Тогда собственное значение $C(m)$ оператора C, записанное в терминах $k = m + r$, инвариантно при преобразованиях из группы Вейля, т. е.

$$C'(Sk) = C'(k) \quad \text{для всех} \quad S \in W, \tag{15}$$

где

$$C'(k) = C(k - r). \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характер $\chi^m(g) = D^m_{pp}(g)$ является собственной функцией для произвольного инвариантного оператора. Поскольку след матрицы D^m инвариантен при преобразовании подобия $D^m(g) \to D^m(g') D^m(g) D^m(g'^{-1})$, то характер $\chi^m(g)$ полупростой группы Ли является функцией на классах сопряженных элементов и принимает форму Вейля (8.8.25). Из формулы Вейля видно, что характер $\chi^m(\delta)$ левоинвариантен при преобразовании S: $k \to Sk$, за исключением возможной смены знака. Следовательно, собственное значение

$$C'\chi^m(\delta) = C'(k)\chi^m(\delta)$$

инвариантно при преобразованиях из группы Вейля.

Эта S-теорема полезна при определении явного вида спектров операторов Казимира для полупростых групп Ли и будет использоваться в последующих разделах.

§ 4. Операторы Казимира для классических групп Ли

А. *Операторы Казимира и их спектры для $U(n)$*

Рассмотрим сначала группу $U(n)$. $n \times n$-Матрицы $u \in U(n)$ удовлетворяют условию $u^* u = 1$. Следовательно, n^2 генераторов M^k_i, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, однопараметрических подгрупп удовлетворяют условию

$$(M^k_i)^* = M^k_i. \tag{1}$$

Однако поскольку коммутационные соотношения для генераторов M^k_i не имеют симметрического вида, обычно переходят к алгебре Ли $\mathrm{gl}(n, R)$, коммутационные соотношения которой имеют вид

$$[A^i_j, A^k_l] = \delta^i_l A^k_j - \delta^k_j A^i_l. \tag{2}$$

Если генераторы A^k_i удовлетворяют условию $(A^k_i)^* = A^i_k$, то n^2 независимых эрмитовых генераторов, удовлетворяющих условию (1), задаются формулами

$$\begin{aligned} M^k_k &= A^k_k, & k &= 1, 2, \ldots, n, \\ M^l_k &= A^l_k + A^k_l, & k &< l \leqslant n, \\ M^k_l &= \mathrm{i}(A^l_k - A^k_l), & k &< l \leqslant n. \end{aligned} \tag{3}$$

Если элемент F обертывающей алгебры E удовлетворяет условию

$$[F,\ A_i^k] = 0 \quad \text{для всех } i,\ k,$$

то в силу (3) он также удовлетворяет условию

$$[F,\ M_i^k] = 0, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Следовательно, задача построения инвариантных операторов для $u(n)$ сводится к этой задаче для $\mathrm{gl}(n, R)$. Последняя задача может быть легко решена с помощью теоремы 3.1. В самом деле, используя (3.8) и присоединенное представление алгебры $\mathrm{gl}(n, R)$

$$V(A_i^j)_l^s = \delta_{il}\delta^{js}, \tag{4}$$

получаем

$$\begin{aligned} g_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \cdots {}_{i_p}^{j_p} &= \mathrm{Tr}\left(V\left(A_{i_1}^{j_1}\right) \cdots V\left(A_{i_p}^{j_p}\right)\right) = \\ &= \delta_{i_1 l_1}\delta^{j_1 s_1}\delta_{i_2 s_1}\delta^{j_2 s_2} \cdots \delta_{i_p s_{p-1}}\delta^{j_p l_1} = \\ &= \delta_{i_1}^{j_p}\delta_{i_2}^{j_1}\delta_{i_3}^{j_2} \cdots \delta_{i_p}^{j_{p-1}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно, согласно (3.7), инвариантные операторы имеют вид

$$\begin{aligned} C_p &= g_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \cdots {}_{i_p}^{j_p} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} \cdots A_{j_p}^{i_p} = \\ &= A_{i_2}^{i_1} A_{i_3}^{i_2} \cdots A_{i_p}^{i_{p-1}} A_{i_1}^{i_p}, \quad p = 1,\ 2,\ \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Следующие две теоремы дают вид спектров инвариантных операторов (6) в пространствах неприводимых представлений. Заметим, что использование тензорных операторов значительно упрощает доказательство теоремы 1.

Теорема 1. *Пусть H^m — пространство неприводимого представления группы $U(n)$, определенного старшим весом $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Тогда спектры инвариантных операторов* (6) *в H^m имеют вид*

$$C_p(m_1, \ldots, m_n) = \mathrm{Tr}(a^p E), \tag{7}$$

где матрица $a = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, такова:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (m_i + n - i)\delta_{ij} - Q_{ij}, \\ Q_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i < j, \\ 0 & \text{при} \quad i \geqslant j; \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

a^p — p-ая степень матрицы a, а E — матрица, все матричные элементы которой равны 1.

Доказательство. Чтобы вычислить спектры инвариантных операторов C_p, $p = 1, 2, \ldots, n$, мы используем идею, которую

Рака использовал для вычисления спектров оператора Казимира C_2 произвольной простой группы Ли [см. (3.10)—(3.12)]. Напомним связь между генераторами A_i^k и генераторами Картана—Вейля H_i, E_α [см. (1.4.10) и (1.4.11)]:

$$\begin{aligned} H_i &= A_i^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ E_{(e_i - e_k)} &= A_i^k, \quad i \neq k, \end{aligned} \tag{9}$$

где $e_i = (0, 0, \ldots, \underset{(i)}{1}, \ldots, 0{,}0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — ортонормированные векторы в R^n. Следовательно, генераторы A_i^k, $i > k$, сопоставляются с положительными корнями алгебры $u(n)$, и они играют роль повышающих операторов.

Рассмотрим теперь неприводимое представление алгебры $u(n)$, которое определяется старшим весом $m = (m_1, \ldots, m_n)$, и обозначим через ψ_m вектор старшего веса. Поскольку при $i > j$ операторы A_i^j являются повышающими операторами, мы получаем

$$A_i^j \psi_m = 0, \quad i > j. \tag{10}$$

Перепишем теперь (6) в виде

$$C_p = (T_{p-1})_j^i A_i^j, \quad \text{где} \quad (T_q)_j^i \equiv A_{i_1}^i A_{i_2}^{i_1} \cdots A_j^{i_{q-1}}. \tag{11}$$

Оператор $(T_{p-1})_j^i$ имеет те же трансформационные свойства относительно $U(n)$, что и A_j^i; поэтому он является тензорным оператором. Следовательно, в силу соотношений (1.9) и (2)

$$[A_j^i, (T_{p-1})_l^k] = \delta_j^k (T_{p-1})_l^i - \delta_l^i (T_{p-1})_j^k, \tag{12}$$

$$(T_{p-1})_j^i \psi_m = 0 \quad \text{при} \quad i < j. \tag{13}$$

Из (10), (11) и (13) следует

$$\begin{aligned} C_p \psi_m &= \sum_{i=1}^n (T_{p-1})_i^i A_i^i \psi_m + \sum_{\substack{i,\, j \\ i>j}} [(T_{p-1})_i^j, A_j^i] \psi_m = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (T_{p-1})_i^i A_i^i + \sum_{\substack{i,\, j \\ i>j}} (T_{p-1})_j^j - (T_{p-1})_i^i \right\} \psi_m \end{aligned} \tag{14}$$

[в (14) суммирование по повторяющимся индексам не производится].

Используя соотношение $A_i^i \psi_m = m_i \psi_m$, находим

$$C_p \psi_m = \sum_{i=1}^n (m_i + n + 1 - 2i)(T_{p-1})_i^i \psi_m. \tag{15}$$

Величина $(T_{p-1})_i^i \psi_m$ может быть вычислена рекурсивно. Именно используя (11)—(13), получаем

$$(T_q)_i^i \psi_m = \sum_{j=1}^{n} (T_{q-1})_j^i A_i^j \psi_m = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (T_{q-1})_j^j \psi_m, \tag{16}$$

где матрица a_{ij} имеет вид

$$a_{ij} = (m_i + n - i)\,\delta_{ij} - Q_{ij},$$
$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i < j, \\ 0 \text{ при } i \geqslant j. \end{cases} \tag{17}$$

Последовательно понижая степень в T_q и используя (16) и тождество

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = m_j + n + 1 - 2j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m_i, \tag{18}$$

получаем такой результат:

$$C_p(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i,\,j=1}^{n} (a^p)_{ij}. \tag{19}$$

Введя матрицу E с матричными элементами $E_{ij} = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, мы можем переписать формулу (19) в виде

$$C_p(m_1, \ldots, m_n) = \operatorname{Tr}(a^p E). \tag{20}$$

Следующая теорема дает удобную производящую функцию для спектра операторов Казимира C_p, $p = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Функция*

$$G(z) = z^{-1}(1 - \Pi(z)), \quad z \in C^1, \tag{21}$$

где

$$\Pi(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right) \tag{22}$$

и

$$\lambda_i = m_i + n - 1, \tag{23}$$

является производящей функцией для спектра операторов Казимира, т. е.

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p(m_1, \ldots, m_n) z^p. \tag{24}$$

Доказательство. Элементарным методом треугольная матрица $a = \{a_{ij}\}$ может быть сведена к диагональному виду.

Поэтому мы можем выразить $C_p(m_1, \ldots, m_n)$ с помощью собственных значений λ_i матрицы a:

$$C_p(m_1, \ldots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_j - 1}{\lambda_i - \lambda_j}, \tag{25}$$

$$\lambda_i = m_i + n - i.$$

Далее мы можем упростить (25), используя следующее интегральное представление:

$$C_p(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^p \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda - \lambda_i}\right) d\lambda, \tag{26}$$

где контур интегрирования окружает (в положительном направлении) все полюса $\lambda = \lambda_i$. При $\lambda = z^{-1}$ имеем

$$C_p(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dr}{z^{p+2}} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right). \tag{27}$$

Из (27, следует, что функция

$$\Pi(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right) = 1 - C_0 z - C_1 z^2 - \ldots, \quad C_0 = n, \tag{28}$$

при $|z| < 1/\lambda_i$ имеет в роли коэффициентов разложения собственные значения следующих один за другим операторов Казимира. Следовательно, функция

$$G(z) = z^{-1}[1 - \Pi(z)] \tag{29}$$

является производящей функцией для операторов Казимира, т. е.

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p z^p. \tag{30}$$

Производящая функция (21) очень удобна для вычисления собственных значений произвольного оператора Казимира C_p. Чтобы проиллюстрировать ее силу, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Вычислим собственные значения операторов Казимира для полностью симметрического $(f, 0, 0, \ldots, 0)$ или полностью антисимметрического $\{1^k\}$ представлений алгебры $u(n)$. Фактически оба эти представления являются частными случаями более общего представления, характеризуемого старшим весом

$(\underbrace{f, f, \ldots, f}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots, 0)$, $k \leqslant n$. Для этого более общего случая имеем

$$\lambda_i = \begin{cases} f + n - i & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ n - i & \text{при} \quad i > k. \end{cases} \tag{31}$$

Из (22) и (31) следует

$$\Pi(z) = \frac{[1-(f-n)z][1-(n-k)z]}{1-(f+n-k)z}. \tag{32}$$

Поэтому

$$G(z) = n + \frac{kfz}{1-(f+n-k)z}. \tag{33}$$

Используя (30), находим

$$C_p(\underbrace{f, \ldots, f}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots, 0) = kf(f+n-k)^{p-1}. \tag{34}$$

Если в этом выражении положить $k = 1$, то получим спектры операторов C_p для полностью симметрического представления $(f, 0, \ldots, 0)$. Если положить $f = 1$, k произвольно, $k \leqslant n$, то получим спектры операторов C_p для полностью антисимметрических представлений $\{1^k\}$ соответственно.

Формула (6) дает бесконечное число инвариантных операторов. Не очевидно, однако, что она дает все генераторы из центра Z обертывающей алгебры E для $u(n)$.

В силу теоремы 3.2 алгебра $u(n)$ имеет n независимых операторов Казимира. Можно ожидать, что первые n операторов Казимира $C_1, C_2, \ldots, C_n$, заданных формулой (6), порождают центр Z. В самом деле, элементарными вычислениями можно показать, что

$$\frac{\partial(C_1, C_2, \ldots, C_n)}{\partial(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = n! \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j). \tag{35}$$

Следовательно, для $i < j$ имеем $(\lambda_i - \lambda_j) > 0$. Якобиан (35) положителен. Поэтому инвариантные операторы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ независимы и их собственные значения однозначно определяют неприводимые представления группы $U(n)$.

Б. *Операторы Казимира группы* SU (n)

Алгебра Ли su (n) порождается операторами A_i^j, $i \neq j$, и операторами $\tilde{A}_i^i$ вида

$$\tilde{A}_i^i = A_i^i - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} A_l^l. \tag{36}$$

Действие операторов $\tilde{A}_i^i$ на старший вектор ψ_m задается формулой (10):

$$\tilde{A}_i^i \psi_m = \left(m_i - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} m_l \right) \psi_m = \tilde{m}_i \psi_m.$$

Следовательно, применяя рассуждения, использованные для вывода формулы (19), получаем

$$C_p^{(su)} (\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} (\tilde{a}^p)_{ij}, \tag{37}$$

где

$$\tilde{a} = a - \frac{m}{n} I, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

и I обозначает единичную матрицу.

Следовательно, мы получим соответствующие выражения для спектра инвариантных операторов $C_p^{(su)}$ группы SU (n), если во всех формулах для $C_p^{(u)}$ заменим числа m_i на числа

$$\tilde{m}_i = m_i - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} m_s.$$

В частности, для представлений, определенных старшим весом $(\underbrace{f, f, \ldots, f}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots, 0)$, получаем

$$C_p^{(su)} (\underbrace{f, f, \ldots, f}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots, 0) =$$

$$= \frac{kf(n+f)(n-k)}{n(n+f-k)} \left\{ \left[\frac{(f+n)(n-k)}{n} \right]^{p-1} - \left[-\frac{kf}{n} \right]^{p-1} \right\}. \tag{38}$$

B. *Операторы Казимира и их спектры для* $O(n)$ *и* Sp (n)

1. Ортогональная группа $O(n)$ состоит из всех линейных преобразований n-мерного евклидова пространства E^n, которые сохраняют квадратичную форму

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \cdots + (\xi^n)^2 = 1. \tag{39}$$

Симплектическая группа Sp $(2n)$ образована из всех преобразований $2n$-мерного комплексного пространства C^{2n}, которые сохраняют билинейную форму

$$[x, y] = \sum_{i,\, j=-n}^{n} h_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^{n} (x^i y^{-i} - x^{-i} y^i). \tag{40}$$

где метрический тензор h_{ij} имеет вид

$$h_{ij} = \varepsilon_i \delta_{i,-j}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad i > 0, \\ -1 & \text{при} \quad i < 0. \end{cases} \tag{41}$$

В дальнейшем удобно рассматривать обе группы вместе. Поэтому в случае ортогональной группы мы переходим от декартовых координат ξ^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, к «сферическим координатам» x^i, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm [n/2]$ (и x^0, если n нечетно):

$$x^1 = \frac{\xi^1 + i\xi^2}{\sqrt{2}}, \quad x^{-1} = \frac{\xi^1 - i\xi^2}{\sqrt{2}}, \quad \ldots, \quad \text{и} \quad x^0 = \xi^n, \text{ если } n \text{ нечетно.}$$

Квадратичная форма (39) теперь принимает вид, аналогичный (40):

$$(x, y) = \sum_{i,j=-n}^{n} g_{ij} x^i y^j, \quad g_{ij} = \delta_{i,-j}.$$

Генераторы X^i_j однопараметрических подгрупп удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[X^i_j, X^k_l] = \delta^k_j X^i_l - \delta^i_l X^k_j + \\ + \begin{cases} \delta^{-l}_j X^k_{-i} - \delta^k_{-i} X^{-l}_l & \text{для } O(n), \\ \varepsilon_i \varepsilon_j \delta^{-l}_j X^k_{-i} - \varepsilon_j \varepsilon_k \delta^k_{-i} X^{-j}_l & \text{для } \mathrm{Sp}(2n). \end{cases} \tag{42}$$

Равенство

$$X_{ij} = -X_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{43}$$

для генераторов группы $O(n)$ в декартовых координатах соответствует теперь следующему равенству:

$$X^i_j = -X^{-j}_{-i}, \quad i, j = -n, \ldots, +n. \tag{44}$$

Для генераторов группы $\mathrm{Sp}(2n)$ имеем соответственно

$$X^i_j = \varepsilon_i \varepsilon_j X^{-j}_{-i}, \quad i, j = -n, \ldots, +n. \tag{45}$$

Из коммутационных соотношений (42) следует, что операторы X^i_i коммутируют один с другим и соответствуют генераторам H_i из базиса Картана, в то время как генераторы X^i_j при $i > j$ соответствуют генераторам E_α, отвечающим положительным корням алгебры. Коммутационные соотношения для тензорного оператора T^k_l, который имеет те же трансформационные свойства,

что и X^i_j, задаются формулой

$$[X^i_j, T^k_l] = \delta^k_j T^i_l - \delta^i_l T^k_j + \\ + \begin{cases} \delta^{-l}_j T^k_{-i} - \delta^k_{-i} T^{-j}_l & \text{для} \quad O(n), \\ \varepsilon_i \varepsilon_j \delta^{-l}_j T^k_{-i} - \varepsilon_j \varepsilon_k \delta^k_{-i} T^{-j}_l & \text{для} \quad \mathrm{Sp}(2n). \end{cases} \tag{46}$$

В частности,

$$[X^i_j, T^j_i] = (1 \mp \delta^i_{-j})(T^i_i - T^j_j), \tag{47}$$

где знак $-$ $(+)$ соответствует ортогональной (симплектической) группе.

Используя теорему Гельфанда 3.1, легко проверить, что операторы

$$C_p = \sum_{i_1, \ldots, i_p} X^{i_1}_{i_2} X^{i_2}_{i_3} \ldots X^{i_p}_{i_1} \tag{48}$$

являются инвариантными операторами для $O(n)$ или $\mathrm{Sp}(2n)$, так как соответствующие полиномы (3.6) в дуальном пространстве являются инвариантами присоединенной группы. Мы вычислим спектры инвариантных операторов тем же методом, что и в случае группы $U(n)$. Используем тот факт, что в пространстве H^m неприводимого представления, определенного старшим весом $m = (m_1, \ldots, m_n)$ (n — ранг группы), вектор старшего веса ψ_m имеет следующие свойства:

$$X^i_j \psi_m = 0 \quad \text{для} \quad i > j, \\ X^i_i \psi_m = m_i \psi_m. \tag{49}$$

На основе соотношений (44) и (45) получаем, что $m_{-i} = -m_i$. Представляя теперь инвариантные операторы (48) в виде

$$C_p = \sum_{i, j} (T^{(p-1)})^i_j X^j_i,$$

где

$$(T^{(p-1)})^i_j = \sum_{i_1, \ldots, i_{p-2}} X^i_{i_1} X^{i_1}_{i_2} \ldots X^{i_{p-2}}_j, \tag{50}$$

и используя (49) и (47), получаем

$$C_p \psi_m = \Big(\sum_i (T^{(p-1)})^i_i X^i_i + \sum_{i>j} [(T^{(p-1)})^i_j, X^j_i] \Big) \psi_m = \\ = \sum_{i=-n}^{n} (m_i + 2r_i)(T^{(p-1)})^i_i \psi_m, \tag{51}$$

где

$$r_i = \frac{1}{2} \sum_{j<i} (1 \mp \delta^i_{-j}). \tag{52}$$

Выражение $(T^{(p-1)})^i_i$ может быть вычислено рекурсивно:

$$(T^{(q)})^i_i \psi_m = \left\{ (T^{(q-1)})^i_i X^i_i + \sum_{i>j} [(T^{(q-1)})^i_j,\ X^j_i] \right\} \psi_m =$$

$$= \left\{ m_i (T^{(q-1)})^i_i + \sum_{j<i} (1 \mp \delta^i_{-j}) [(T^{(q-1)})^i_i - (T^{(q-1)})^j_j] \right\} \psi_m =$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} a_{ij} (T^{(q-1)})^j_j \psi_m,$$

где

$$a_{ij} = (l_i + \alpha)\delta_{ij} - \theta_{ji} + \frac{1}{2}\beta(1+\varepsilon_i)\delta_{i,-j},$$

$$l_i = m_i + r_i, \quad \theta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{при } j < i, \\ 0 & \text{при } j \geqslant i. \end{cases} \tag{53}$$

Константы α и β для различных групп и явные выражения для r_i даны в табл. 1.

Таблица 1

Алгебра	Группа	Инвариантная форма	α	β	r_i	Значения, которые пробегает индекс
A_{n-1}[1]	SU(n)	$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$	$\frac{n-1}{2}$	0	$\frac{n+1}{2} - i$	1, 2, ..., n
B_n	$O(2n+1)$	$\sum_{i=-n}^{n} x^i y^{-i}$	$n - \frac{1}{2}$	1	$\left(n + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_i - i$	1, 2, ..., n, 0, $-n$, ..., -2, -1
C_n	Sp($2n$)	$\sum_{i=1}^{n} (x^i y^{-i} - x^{-i} y^i)$	n	-1	$(n+1)\varepsilon_i - i$	1, 2, ..., n, $-n$, ..., -2, -1
D_n	$O(2n)$	$\sum_{i=1}^{n} (x^i y^{-i} + x^{-i} y^i)$	$n-1$	1	$n\varepsilon_i - i$	1, 2, ..., n, $-n$, ..., -2, -1

[1]) Для $U(n)$ α, β и r_i имеют те же значения, что и для SU (n).

Используя (51) и (53), мы получаем, наконец,

$$C_p(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n) = \mathrm{Tr}\,(a^p E). \tag{54}$$

Следовательно, нахождение спектров инвариантных операторов (48) сведено к элементарной задаче нахождения p-й степени известной матрицы a.

Используя формулу (54), легко вычислить, что спектры инвариантных операторов низших порядков групп $O(2n)$, $O(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$ имеют вид

$$C_2 = 2S_2, \quad C_3 = 2\left[\alpha - \frac{1}{2}(\beta - 1)\right]C_2, \qquad C_4 = 2S_4 - (2\alpha\beta + \beta - 1)S_2, \tag{55}$$

где

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} (l_i^k - r_i^k). \tag{56}$$

Из (55) и (56) следует, что спектр оператора C_2 имеет вид

$$C_2 = 2(m^2 + 2rm). \tag{57}$$

Он совпадает (с точностью до множителя 2) с результатом Рака, данным в (3.12).

Важная задача нахождения независимых инвариантных операторов, которые порождают центр обертывающей алгебры, может быть решена с помощью S-теоремы Рака, рассмотренной в разделе А. На языке переменных $l_1, l_2, \ldots, l_n$ эта теорема утверждает, что спектры инвариантных операторов инвариантны при действии группы Вейля S. В терминах переменных $l_1, l_2, \ldots, l_n$ любой элемент $s \in S$ для $O(2n+1)$ или $\mathrm{Sp}(2n)$ может быть представлен как перестановка чисел $l_1, \ldots, l_n$ и как произвольное число отражений:

$$l_i \to -l_i, \quad l_j \to l_j, \quad j \neq i.$$

Следовательно, спектры инвариантных операторов могут быть записаны с помощью симметрических полиномов четного порядка от переменных

$$\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^{n} l_i^k$$

или переменных

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} (l_i^k - r_i^k), \tag{58}$$

которые более удобны для практических вычислений (например, для тождественного представления $m = (0, 0, \ldots, 0)$ из $S_k = 0$ сразу следует, что $C_p = 0$).

Следовательно, инвариантные операторы C_p с нечетным p зависимы и могут быть записаны в терминах операторов C_{2q}

с $2q < p$. Прямым вычислением можно показать, что для $O(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$ якобиан

$$\frac{\partial(C_2, C_4, \ldots, C_{2n})}{\partial(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$$

не обращается в нуль. Итак, множество операторов $C_2, C_4, \ldots, C_{2n}$ порождает кольцо инвариантных операторов для групп $O(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$. В случае группы $O(2n)$ ситуация несколько отличается. Спектры инвариантных операторов C_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, все еще инвариантны при действии группы Вейля, которая в случае группы $O(2n)$ сводится к перестановкам чисел l_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и парным отражениям:

$$l_i \to -l_i, \quad l_j \to -l_j, \quad l_k \to l_k, \quad k \neq i, j. \tag{59}$$

Однако, как мы показали в 8.5, для этой группы существуют два неэквивалентных фундаментальных спинорных представления Δ_+ и Δ_-, старшие веса которых имеют вид

$$m_+ = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad m_- = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \tag{60}$$

Спектры инвариантных операторов C_{2i}, $i = 1, \ldots, n$, выражаются в терминах сумм S_k с четным k, и, следовательно, на них не действует подстановка $m_n \to -m_n$ (которая приводит к $l_n \to l_n$, так как $r_n = 0$). То же имеет место для пар представлений $\Delta_+^p \Delta_-^q$ и $\Delta_+^q \Delta_-^p$. Следовательно, множество инвариантных операторов C_{2i} не может характеризовать различные неэквивалентные представления. Поскольку для спинорных представлений $m_i \geqslant 0$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, и только m_n может принимать как положительные так и отрицательные значения, для установления взаимно однозначного соответствия между компонентами старшего веса m_i и спектрами инвариантных операторов достаточно заменить, скажем, оператор C_{2n} на новый инвариантный оператор, на который действует подстановка $m_n \to -m_n$. Такой инвариантный оператор может быть построен с помощью полностью антисимметрического тензора $\varepsilon_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}$, все ненулевые компоненты которого в сферических координатах определяются условием $\varepsilon_{n, n-1, \ldots, -n+1, -n} = -1$. Инвариантный оператор, построенный с помощью полностью антисимметрического тензора, имеет вид

$$C_n' = \sum \varepsilon_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} X^{i_1 j_1} \ldots X^{i_n j_n} = \sum_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \varepsilon_{i_1 \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_n} X_{i_1}^{j_1} \ldots X_{i_n}^{j_n}. \tag{61}$$

Действуя оператором C_n' на вектор старшего веса ψ_m и используя (49), мы можем выразить собственное значение оператора C_n'

через собственные значения m_i диагональных операторов X_i^i. Старший член имеет вид

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n}^{i_1 \ldots i_n} m_{i_1} \cdots m_{i_n} = (-1)^{n(n-1)/2} 2^n n! m_1 \cdots m_n.$$

Следовательно, переходя к переменным l_i, находим, что C'_n — полином степени n от переменных $l_1, \ldots, l_n$ со старшим членом $(-1)^{n(n-1)/2} 2^n n! l_1 l_2 \ldots l_n$. Симметрия относительно группы Вейля S, выраженная через l_i группы $O(2n)$, означает, что спектр инвариантных операторов должен оставаться неизменным при любых перестановках переменных $l_1, \ldots, l_n$ и при любых парных отражениях (59). Этим условиям удовлетворяют следующие симметрические полиномы, степени которых не превышают n: $l_1 l_2 \ldots l_n$ и $l_1^\alpha + l_2^\alpha + \cdots + l_n^\alpha$ для четных $\alpha < n$. Чтобы найти окончательный вид спектра оператора C'_n, мы используем тот факт, что оператор (61) является псевдоскалярным оператором в расширенной группе $O(2n)$, содержащей пространственные отражения. Мы показали, что если заданное неприводимое представление T_g группы $SO(2n)$ характеризуется старшим весом $m = (m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n)$, то зеркально сопряженное представление

$$\check{T}_g = T_{ogo^{-1}}, \quad g \in SO(2n), \quad o \text{ — отражение},$$

имеет старший вес $m = (m_1, \ldots, m_{n-1}, -m_n)$ (см. лемму 8.5.1). Так как для группы $O(2n)$ $r_n = 0$, то мы получаем, что $m_n = l_n$ и

$$C'_n(l_1, \ldots, l_{n-1}, -l_n) = -C'_n(l_1, \ldots, l_{n-1}, l_n). \tag{62}$$

В силу S-теоремы Рака C'_n — симметрическая функция от чисел $l_1, \ldots, l_n$, и, следовательно, соотношение (62) удовлетворяется для любых l_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому выражение для спектра оператора C'_n может содержать только члены, пропорциональные $l_1 l_2 \ldots l_n$, т. е.

$$C'_n(m_1, \ldots, m_n) = (-1)^{n(n-1)/2} 2^n n! l_1 l_2 \cdots l_n.$$

Прямым вычислением может быть показано, что

$$\frac{\partial(C_2, C_4, \ldots, C_{2(n-1)}, C'_{2n})}{\partial(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \neq 0.$$

2. Частные случаи.

Рассмотрим сначала случай полностью симметрических представлений групп $O(2n)$, $O(2n+1)$ или $\mathrm{Sp}(2n)$, которые характеризуются старшим весом $m = (f, 0, \ldots, 0)$. Используя формулу (54), получаем

$$C_p(f, 0, \ldots, 0) = (f+2\alpha)^p + (-f)^p + (2\alpha+\beta-1) + \\ + (2\alpha-1)\left(1+\frac{\beta+1}{2(\alpha-1)}\right)\left[\frac{(-f)^p-1}{f+1} - \frac{(f+2\alpha)^p-1}{f+2\alpha-1}\right] + \\ + \frac{\alpha(\beta+1)}{2(\alpha-1)}\,\frac{(f+2\alpha)^p-(-f)^p}{f+\alpha}. \quad (63)$$

Для наинизших значений p эта формула упрощается:

$$C_2 = 2f(f+2\alpha), \quad (64)$$

$$C_4 = 2f(f+2\alpha)\left[f^2+2\alpha f+2\alpha^2-\alpha\beta-\frac{1}{2}(\beta-1)\right]. \quad (65)$$

В случае полностью антисимметрических фундаментальных представлений, характеризуемых старшими весами $m = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots, 0)$, спектр операторов C_p имеет вид

$$C_p(\{1^k\}) = -(2\alpha+2-k)^p - k^p + (-1)^p(2\alpha+\beta+3) + \\ + (2\alpha+3)\left(1+\frac{\beta-1}{2(\alpha+2)}\right)\left[\frac{k^p-(-1)^p}{k+1} + \frac{(2\alpha+2-k)^p-(-1)^p}{2\alpha+3-k}\right] + \\ + \frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{2(\alpha+2)}\,\frac{k^p-(2\alpha+2-k)^p}{\alpha+1-k}. \quad (66)$$

Для $p = 2$ и 4 получаем

$$C_2 = 2k(2\alpha+2-k), \quad (67)$$

$$C_4 = 2k(2\alpha+2-k)\left[k^2-2(\alpha+1)k + \\ + (\alpha+1)(2\alpha+2-\beta)+\frac{1}{2}(\beta+1)\right]. \quad (68)$$

Как мы уже упоминали, для $O(2n+1)$ и $O(2n)$ кроме фундаментальных тензорных представлений $\{1^k\}$ имеем еще фундаментальные спинорные представления, старшие веса которых равны

$$m = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) & \text{для } O(2n+1), \\ \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) & \text{для } O(2n). \end{cases}$$

Спектры операторов C_p для этих представлений задаются формулой

$$C_p = \begin{cases} n\left[n^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для} \quad O(2n+1), \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для} \quad O(2n). \end{cases}$$

§ 5. Обертывающие поля

Некоторые физические наблюдаемые описываются операторами, которые являются отношениями полиномов от генераторов алгебры Ли. Например, квадрат оператора релятивистского спина имеет вид

$$S^2 = \frac{W_\mu W^\mu}{P_\mu P^\mu}, \qquad W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} M^{\alpha\beta} P^\gamma, \tag{1}$$

где P^μ, $M^{\alpha\beta}$ — генераторы группы Пуанкаре П. Величины типа (1) не лежат в обертывающей алгебре группы П. Последняя состоит только из полиномов от генераторов. Поэтому мы вводим понятие *обертывающего поля* алгебры Ли, которое объединяет естественным образом отношения полиномов от генераторов алгебры Ли. Обертывающее поле имеет также другие интересные свойства: оно слабо зависит от первоначальной алгебры Ли и может быть порождено алгеброй Гейзенберга $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ и некоторым числом коммутирующих операторов $C_1, \ldots, C_k$. Этот результат важен для теории динамических групп в физике частиц.

Кольца и поля отношений

Начнем с анализа некоторых свойств колец и полей. Напомним, что *кольцо* R — это абелева группа относительно сложения и (в общем некоммутативная) мультипликативная полугруппа с единичным элементом или без него. Говорят, что элемент b из R *регулярен* (или *не делитель нуля*), если не существует $c \in R$, $c \neq 0$, такого, что $cb = 0$ или $bc = 0$.

Кольцо R называется *левым нётеровым*, если каждая цепочка (левых) идеалов из R

$$R_1 \Subset R_2 \Subset \cdots \tag{2}$$

обрывается [1]) (т. е. существует индекс n, такой, что $R_n = R_{n+1} = \ldots$).

Кольцо R называется (*левым*) *кольцом Оре*, если для каждых $a, b \in R$, где b регулярен, существуют $a', b' \in R$, где b' регулярен, такие, что $b'a = a'b$.

[1]) $R_1 \Subset R_2$ означает, что R_1 является собственным идеалом в R_2.