Спектры операторов C_p для этих представлений задаются формулой

$$C_p = \begin{cases} n\left[n^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для} \quad O(2n+1), \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для} \quad O(2n). \end{cases}$$

§ 5. Обертывающие поля

Некоторые физические наблюдаемые описываются операторами, которые являются отношениями полиномов от генераторов алгебры Ли. Например, квадрат оператора релятивистского спина имеет вид

$$S^2 = \frac{W_\mu W^\mu}{P_\mu P^\mu}, \qquad W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} M^{\alpha\beta} P^\gamma, \tag{1}$$

где P^μ, $M^{\alpha\beta}$ — генераторы группы Пуанкаре П. Величины типа (1) не лежат в обертывающей алгебре группы П. Последняя состоит только из полиномов от генераторов. Поэтому мы вводим понятие *обертывающего поля* алгебры Ли, которое объединяет естественным образом отношения полиномов от генераторов алгебры Ли. Обертывающее поле имеет также другие интересные свойства: оно слабо зависит от первоначальной алгебры Ли и может быть порождено алгеброй Гейзенберга $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ и некоторым числом коммутирующих операторов $C_1, \ldots, C_k$. Этот результат важен для теории динамических групп в физике частиц.

Кольца и поля отношений

Начнем с анализа некоторых свойств колец и полей. Напомним, что *кольцо* R — это абелева группа относительно сложения и (в общем некоммутативная) мультипликативная полугруппа с единичным элементом или без него. Говорят, что элемент b из R *регулярен* (или *не делитель нуля*), если не существует $c \in R$, $c \neq 0$, такого, что $cb = 0$ или $bc = 0$.

Кольцо R называется *левым нётеровым*, если каждая цепочка (левых) идеалов из R

$$R_1 \Subset R_2 \Subset \cdots \tag{2}$$

обрывается [1]) (т. е. существует индекс n, такой, что $R_n = R_{n+1} = \ldots$).

Кольцо R называется (*левым*) *кольцом Оре*, если для каждых $a, b \in R$, где b регулярен, существуют $a', b' \in R$, где b' регулярен, такие, что $b'a = a'b$.

[1]) $R_1 \Subset R_2$ означает, что R_1 является собственным идеалом в R_2.

Введем теперь важное понятие отношений. Пусть (a, b) и (c, d) — две упорядоченные пары из $R \times R$, и пусть a и c — регулярны. Мы говорим, что (a, b) эквивалентно (c, d), если существуют $x, y \in R$, такие, что

$$(xa, xb) = (yc, yd). \tag{3}$$

Легко проверить, что все аксиомы эквивалентности выполнены.

Отношение, сопоставляемое с кольцом Оре R, определяется как упорядоченная пара (a, b), $a, b \in R$, где a регулярно. Причем для отношений должно выполняться приведенное соотношение эквивалентности. Отношение (a, b) мы обозначим символом $a^{-1}b$. Подобным образом определяется правое отношение, обозначаемое ab^{-1}.

Далее в множество всех отношений следующим естественным образом вводятся операции сложения, вычитания, деления и умножения:

$$(a^{-1}b_1 \pm a^{-1}b_2) \equiv a^{-1}(b_1 \pm b_2), \tag{4}$$

$$(a^{-1}b_1)^{-1}(a^{-1}b_2) \equiv b_1^{-1}b_2, \tag{5}$$

$$(a_1^{-1}b_1)(a_2^{-1}b_2) \equiv (b_1^{-1}a_1)^{-1}(a_2^{-1}b_2). \tag{6}$$

Напомним, что кольцо R с единичным элементом I называется *полем*, если для любого $a \in R$, $a \neq 0$, существует a^{-1}, такое, что $aa^{-1} = a^{-1}a = I$. Мы видим, что множество всех отношений, сопоставляемое с кольцом Оре без делителей нуля и наделенное операциями (4)—(6), образует поле, которое называется *полем отношений*.

Пример 1. Пусть R — кольцо всех четных целых чисел: $R = \{\pm 2n, n = 0, 1, \ldots\}$. Каждый элемент $a \in R$, $a \neq 0$, регулярен в R. Если $a = 2n$, $b = 2m$, $m \neq 0$, то существуют a' (равное, например, $2n$) и $b' \neq 0$ (равное, например, $2m$), такие, что $b'a = a'b$. Следовательно, R — кольцо Оре.

Пусть $(a, b) \equiv (2n, 2m)$, $a \neq 0$. В силу условия (3) любая пара $(c, d) \equiv (2n', 2m')$, эквивалентная (a, b), удовлетворяет условию

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}. \tag{7}$$

Итак, абстрактное частное $a^{-1}b$ соответствует классу всех пар $(2n', 2m')$ вида (xa, xb), $x \in R$, которые имеют постоянное отношение $m'/n' = b/a$. Следовательно, абстрактное поле отношений, определенное соотношениями (4)—(6), соответствует в настоящем случае полю рациональных чисел.

Кольцо и поле Гейзенберга

Введем теперь поле, сопоставляемое с алгеброй Гейзенберга и порожденное нётеровым кольцом A и p, q.

Пусть A — произвольное нётерово кольцо над R или C без делителей нуля. Через $R_n(A)$ мы обозначаем алгебру над A с $2n$ генераторами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} I, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, q_j] = 0. \tag{8}$$

Введем в $R_n(A)$ базис.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Алгебра $R_n(A)$ является свободным A-модулем и имеет базис, состоящий из всех одночленов вида*

$$(p_1)^{k_1} \cdots (p_n)^{k_n} (q_1)^{l_1} \cdots (q_n)^{l_n} \equiv p^{(k)} q^{(l)}, \tag{9}$$

где $p_i^{(0)} = I_R$ и $q_i^{(0)} = I_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что одночлены (9) порождают A-модуль $R_n(A)$. Пусть $[R_n(A)]_k$ обозначает множество всех элементов из $R_n(A)$, которые могут быть записаны в виде полиномов от $\{p, q\}$ с коэффициентами из A, имеющих степень $\leqslant k$. Ясно, что

$$R_n(A) = \bigcup_k [R_n(A)]_k. \tag{10}$$

Предположим, что это предположение верно для $k < k_0$. В силу коммутационных соотношений (8) мы можем привести любой одночлен степени k_0 к одночлену вида (9) (т. е. к виду, в котором все p на левой стороне) по модулю $[R_n(A)]_{k_0-2}$. Поскольку предположение, очевидно, верно для $k = 0$ и $k = 1$, высказанное в начале доказательства утверждение следует из метода индукции. Покажем далее, что одночлены (9) линейно независимы над A. Пусть $x = \sum a_{kl} p^{(k)} q^{(l)} = 0$, где $a_{kl} \in A$, и по крайней мере одно из a_{kl} не равно 0. Вводим лексикографическое упорядочение в множества $(k, l) = (k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_n)$. Пусть (k_0, l_0) — наибольшее множество (согласно лексикографическому упорядочению), для которого $a_{kl} \neq 0$. Простым вычислением проверяется, что

$$\prod_{i=1}^{n} ad^{k_i^0}(-q_i)\, ad^{l_i^0} p_i x = \prod_{i=1}^{n} k_i!\, l_i!\, a_{k_0 l_0} \neq 0. \tag{11}$$

Это противоречит равенству $x = 0$. Поэтому $p^{(k)}q^{(l)}$ не могут быть линейно зависимыми.

Утверждение 2. $R_n(A)$ — *кольцо Оре.*

Доказательство. Введем в $R_n(A)$ фильтрацию, заданную формулой

$$[R_n(A)]_0 \subset [R_n(A)]_1 \subset [R_n(A)]_2 \subset \ldots, \tag{12}$$

где $R_n(A)_k$ — те же объекты, что и в доказательстве утверждения 1. Рассмотрим *градуированную кольцевую структуру*, заданную формулами

$$\mathrm{gr}^{(k)} R_n(A) \equiv [R_n(A)]_k / [R_n(A)]_{k-1} \tag{13}$$

и

$$\mathrm{gr}\, R_n(A) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{gr}^{(k)} R_n(A).$$

В силу утверждения 1 получаем взаимно однозначное соответствие

$$\mathrm{gr}\, R_n(A) \leftrightarrow R[p, q], \tag{14}$$

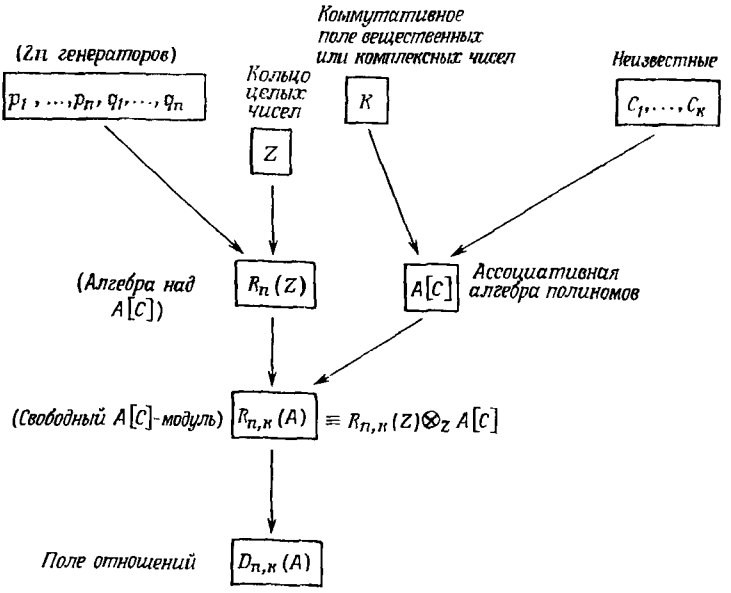
где $R[p, q]$ — кольцо полиномов от (p, q). Ясно, что $R[p, q]$ — нётерово кольцо без делителей нуля (так как оно является кольцом полиномов). Следовательно, $\mathrm{gr}\, R_n(A)$ также нётерово кольцо. Поэтому в силу утверждений 1 и 2 из приложения А.2 заключаем что $R_n(A)$ — кольцо Оре без делителей нуля.

Благодаря утверждению 2 мы сопоставляем теперь с кольцом $R_n(A)$ поле отношений $D_n(A)$. В последующем основное кольцо A будет кольцом полиномов над множеством k неизвестных $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\} \equiv \widehat{C}$ с коэффициентами из множества K вещественных или комплексных чисел. Положим

$$R_{n,k}(K) = R_n(A[\widehat{C}]), \tag{15}$$

$$D_{n,k}(K) \equiv \text{поле отношений, сопоставляемое с } R_{n,k}(K). \tag{16}$$

Следующий рисунок иллюстрирует связь между различными объектами.



Обертывающее поле алгебры Ли

Пусть L — алгебра Ли над множеством K вещественных или комплексных чисел, и пусть $E(L)$ — обертывающая алгебра для L. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. *$E(L)$ — кольцо Оре.*

Доказательство. Введем на $E(L)$ *фильтрацию*, заданную формулой

$$E^{(0)} \subset E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \ldots, \tag{17}$$

где $E^{(k)}$ обозначает множество всех элементов из E, которые могут быть записаны как полиномы от генераторов алгебры L с коэффициентами из K и имеют степень $\leqslant k$. Рассмотрим соответствующую *градуированную кольцевую структуру*, определенную формулами

$$\mathrm{gr}^k E \equiv E^{(k)}/E^{(k-1)}, \tag{18}$$

$$\mathrm{gr}\, E \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{gr}^k E. \tag{19}$$

Ввиду утверждения 1 и определений (18) и (19) мы имеем взаимно однозначное соответствие

$$\mathrm{gr}\, E \leftrightarrow R(X_1, \ldots, X_m), \tag{20}$$

где $R(X_1, \ldots, X_m)$ — кольцо всех полиномов от m переменных, $m = \dim L$. Следовательно, $\operatorname{gr} E$ — нётерово кольцо без делителей нуля (так как оно является кольцом полиномов). В силу утверждений 1 и 2 из приложения А.2 заключаем, что E — кольцо Оре без делителей нуля.

Вышеизложенное свойство позволяет построить поле отношений $D(L)$ для $E(L)$. Это поле называется обертывающим полем для L или просто *полем Ли*.

Мы видим, что понятие поля отношений позволяет естественным образом рассматривать отношения произвольных элементов обертывающей алгебры заданной алгебры Ли L. Если L — алгебра Пуанкаре, то элементы вида (1) лежат в поле $D(L)$ алгебры L.

Это не единственное использование понятия поля $D(L)$, сопоставляемого с $E(L)$. Интересно, что свойства поля $D(L)$, в противоположность свойствам $E(L)$, слабо зависят от первоначальной алгебры Ли. Мы можем грубо сформулировать это так:

Поле $D(L)$ алгебры Ли L изоморфно полю Гейзенберга $D_{n,k}(K)$.

Докажем этот результат сначала для поля $D(L)$ полной линейной алгебры $\mathrm{gl}(n, C)$.

Теорема 4. *Обертывающее поле* $D(\mathrm{gl}(n, C))$ *алгебры Ли* $\mathrm{gl}(n, C)$ *изоморфно полю Гейзенберга* $D_{n(n-1)/2,\, n}(C)$.

Доказательство. Покажем сначала, что если L_n — алгебра Ли всех $n \times n$-матриц с нулями в последней строке, то

$$D(L_n) = D_{(n/2)(n-1),\, 0}(C). \tag{21}$$

Докажем это индукцией по n. Пусть e_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n+1$, — естественный базис в L_{n+1}, заданный формулой (1.1.11). Положим $q_i = e_{i,n+1}$, $p_i = e_{i,i}q_i^{-1}$, $\tilde{e}_{ik} = e_{ik}q_i^{-1}q_k$ (суммирование отсутствует).

Поскольку $\det q_i = 0$, величина q_i^{-1} не определена как матрица, а определена как формальная величина, правила действия над которой подчиняются соотношению эквивалентности отношений. Прямым вычислением можно проверить, что

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij} I, \tag{22}$$

$$[\tilde{e}_{ik}, q_j] = \delta_{kj} q_j, \ [\tilde{e}_{ik}, p_j] = -\delta_{kj} p_j \text{ (суммирование отсутствует).} \tag{23}$$

Действительно, например

$$[q_i, q_j] = q_i q_j - q_j q_i = e_{i,n+1} e_{j,n+1} - e_{j,n+1} e_{i,n+1} = \\ = \delta_{j,n+1} e_{i,n+1} - \delta_{i,n+1} e_{j,n+1} = 0. \tag{24}$$

Согласно определению отношений, из этого соотношения следует

$$q_j q_i^{-1} = q_i^{-1} q_j, \tag{25}$$

т. е. q_i^{-1} и q_j коммутируют.

Подобным образом вычисляем

$$[p_i, q_j] = e_{ii} q_i^{-1} q_j - q_j e_{ii} q_i^{-1} = e_{ii} q_j q_i^{-1} - e_{j,\, n+1} e_{ii} q_i^{-1} =$$
$$= e_{ii} e_{j,\, m+1} q_i^{-1} - \delta_{i,\, n+1} e_{ji} q_i^{-1} = \delta_{ij} e_{i,\, m+1} q_i^{-1} = \delta_{ij} q_i q_i^{-1} = \delta_{ij} I$$

(здесь суммирования отсутствуют). Если коэффициенты c_{ik} матрицы c удовлетворяют условию

$$\sum_k c_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{26}$$

то из (23) мы видим, что оператор $\alpha(c) = c_{ik}\tilde{e}_{ik}$ коммутирует со всеми операторами p_i и q_j. Пусть $\tilde{L}$ обозначает множество всех матриц c порядка n, матричные элементы которых удовлетворяют условиям (26). Множество $\tilde{L}$ изоморфно L_n. В самом деле, если l_{ij} — матричные элементы элемента $l \in L_n$, то соответствие

$$c_{ij} = l_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

и

$$c_{nj} = -\sum_{i=1}^{n-1} l_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

дает взаимно однозначное отображение $\tilde{L}$ на L_n.

С каждой матрицей $c \in \tilde{L}$ теперь сопоставляем элемент $\alpha(c) \equiv \equiv c_{ik}\tilde{e}_{ik} \in D(L_{n+1})$. Легко проверить, что

$$\alpha([c_1, c_2]) = [\alpha(c_1), \alpha(c_2)]. \tag{29}$$

Ясно, что поле Ли $D(L_{n+1})$ порождается элементами вида $\alpha(c)$, $c \in \tilde{L}$, и элементами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Следовательно, для того чтобы получить наше утверждение, достаточно показать, что поле, порожденное элементами $\alpha(c)$, изоморфно полю $D_{n\,(n-1)/2,\,0}(L)$. Теперь $\tilde{L}$ изоморфно L_n; поэтому соотношение (21) для L_{n+1} следует по индукции.

Центр алгебры $E(\mathrm{gl}(n, C))$ порождается n элементами вида $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $C_s = \mathrm{Tr}\, e^s$, $e \equiv \{e_{lk}\}$.

Элементы последней строки входят линейно в одночлены C_i. Следовательно, $D(\mathrm{gl}(n, C))$ порождается элементами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и $D(L_n)$. Итак,

$$D(\mathrm{gl}(n, C)) = D_{(n/2)\,(n-1),\,n}(C). \tag{30}$$

Следствие. $D(\mathrm{sl}(n, C)) = D_{n\,(n-1)/2,\,n-1}(C)$.

Доказательство. $D(\mathrm{sl}(n, C))$ порождается элементами $C_2, C_3, \ldots$ $\ldots, C_n$ и $D(L_n)$. Поэтому (30) следует из (21).

Чтобы обобщить основной результат до произвольной полупростой алгебры Ли L, удобно использовать конкретную реализацию алгебры L дифференциальными операторами на многообразии $X = N\backslash G$, где N — нильпотентная подгруппа из разложения Ивасавы $G = KAN$. В этом случае могут существовать инвариантные операторы в пространстве $H = L^2(X)$, которые не являются элементами центра алгебры $E(L)$. Пусть $\tilde{E}(L)$ обозначает расширение алгебры $E(L)$ кольцом инвариантных операторов, которые не порождаются элементами центра Z алгебры $E(L)$[1]. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, и пусть $D(L)$ — обертывающее поле расширенной обертывающей алгебры $\tilde{E}(L)$, реализованной в пространстве $H = L^2(X)$, $X = N\backslash G$. Пусть (t_α, τ_i), $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $n = \dim N$, и $i = 1, 2, \ldots, k = \mathrm{rank}\, C$ — координаты в пространстве X. Тогда поле $D(L)$ изоморфно полю Гейзенберга $D_{n,k}(C)$, порожденному операторами*

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \quad q_\alpha = t_\alpha, \quad C_i = \tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i} \quad (\textit{суммирование отсутствует}). \tag{31}$$

(Эта теорема доказана Гельфандом и Кирилловым).

Последние авторы доказали также аналогичную теорему для класса нильпотентных алгебр Ли [312].

Эти теоремы показывают, что существует общая основная структура обертывающих полей всех полупростых алгебр Ли, и эта структура изоморфна структуре полей Гейзенберга.

Числа n и k, которые появляются в поле Гейзенберга $D_{n,k}(C)$, имеют определенный смысл в теории представлений; а именно, в случае конечномерных представлений k является числом компонент старшего веса $m = (m_1, \ldots, m_k)$, который характеризует неприводимое представление T^{L^m} группы G (гл. 8). Число n является размерностью области определения $G_0\backslash G$ функций пространства $H(G_0\backslash G)$ неприводимого представления T^{L^m} группы G (гл. 8). Эта интерпретация чисел k и n справедлива также в теории бесконечномерных представлений (гл. 19).

---

[1]) Заметим, что центр Z в $E(L)$ содержит инвариантные операторы, которые являются полиномами от генераторов; $\tilde{E}(L)$ содержит инвариантные операторы, которые являются рациональными функциями от генераторов. Однако в общем случае могут существовать инвариантные операторы, которые являются более общими функциями от генераторов, например псевдодифференциальные операторы.

Тот факт, что обертывающее поле алгебры Ли порождается алгеброй Гейзенберга p_i, q_i и множеством $C_1, \ldots, C_k$ инвариантных операторов, полезен в квантовой механике и в физике частиц. В частности, он служит инструментом для интерпретации и анализа так называемых динамических групп (гл. 13).

§ 6. Дальнейшие результаты и комментарии

А. *Операторы Казимира и их спектры для полупростых алгебр Ли*

Распространим теперь теорему 4.2 на другие полупростые алгебры Ли. Для произвольных полупростых алгебр Ли завершенного тензорного исчисления не существует. Поэтому мы используем формулу (3.7) для операторов Казимира:

$$C_p = g_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} X^{\mu_1} X^{\mu_2} \cdots X^{\mu_p}, \quad p = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где

$$g_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} = \mathrm{Tr}\,(\widehat{X}_{\mu_1}\widehat{X}_{\mu_2} \cdots \widehat{X}_{\mu_p}) \tag{2}$$

($\widehat{X}_\mu$ — представление генераторов X_μ в произвольном неприводимом представлении заданной алгебры Ли). Для классических алгебр Ли A_n, B_n, C_n и D_n мы берем в роли представления $X_\mu \to \widehat{X}_\mu$ простейшее фундаментальное представление $m = (1, 0, \ldots, 0)$. Следующая теорема дает прямое обобщение результатов теоремы 4.2 для полупростых алгебр Ли.

Теорема 1. *Пусть $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — старший вес неприводимого представления любой из классических алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $X_\mu \to \widehat{X}_\mu$ — простейшее фундаментальное представление $m = (1, 0, \ldots, 0)$. Функция*

$$G(z) = z^{-1}\left(1 + \frac{\beta z}{2 - (2\alpha + 1)z}\right)(1 - \Pi(z)), \tag{3}$$

где

$$\Pi(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right), \quad \lambda_i = l_i + \alpha, \tag{4}$$

$$l_i = m_i + r_i, \quad i > 0, \quad l_{-i} = -l_i, \quad l_0 = 0,$$

является производящей функцией для спектра операторов Казимира (1), *т. е.*

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p(m_1, \ldots, m_n) z^p. \tag{5}$$