ТЕОРЕМА ГЕЛЬФАНДА—ШЕВАЛЛЕ. *Число генераторов кольца инвариантных операторов, реализованных в $L^2(X)$, равно рангу симметрического пространства $X$.*

(Доказательство см. в [390].)

Таким образом, в частности на симметрических пространствах ранга один центр обертывающей алгебры порождается единственным элементом. В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Кольцо инвариантных операторов, реализованных в $L^2(X)$, где $X$ — симметрическое пространство ранга один, порождается оператором Лапласа—Бельтрами*

$$\Delta(x) = |\bar{g}|^{-1/2}\partial_\alpha g^{\alpha\beta}(x)|\bar{g}|^{1/2}\partial_\beta, \tag{9}$$

*где $g_{\alpha\beta}(x)$ — левоинвариантный метрический тензор на $X$ и*

$$\bar{g}(x) = \det[g_{\alpha\beta}(x)].$$

(Доказательство см. в [390].)

6. Дадим теперь важную так называемую теорему коммутативности Сигала, касающуюся структуры алгебры инвариантных операторов в $L^2(G, \mu)$. Пусть $G$ — унимодулярная локально компактная группа с мерой Хаара $\mu$, и пусть $g \to T_g^L$ и $g \to T_g^R$ — левое и правое регулярные представления группы $G$ в $L^2(G, \mu)$. Обозначим через $\mathcal{R}_L$ (или $\mathcal{R}_R$) замыкание в слабой операторной топологии множества всех линейных комбинаций из $T_g^L$ (или из $T_g^R$). Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Если $G$ унимодулярна, то мы имеем*

$$\mathcal{R}'_L = \mathcal{R}_R, \quad \mathcal{R}'_R = \mathcal{R}_L, \tag{10}$$

$$(\mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_R)' = \mathcal{R}'_L \cap \mathcal{R}'_R = \mathcal{R}_L \cap \mathcal{R}'_L = \mathcal{R}_R \cap \mathcal{R}'_R. \tag{11}$$

(Доказательство см. в [745] или в [574], гл. 6, § 7.)

## § 7. Упражнения

§ 1.1. Пусть $G = SO(3)$. Покажите, что эрмитово сопряжение тензорного оператора $Y_M^J$, заданное формулой

$$(Y_M^J)^* = (-1)^M Y_{-M}^J,$$

также является тензорным оператором.

§ 1.2. Докажите теорему Вигнера—Эккарта для произвольных компактных групп.

*Указание.* Разложите на неприводимые компоненты то представление группы $G$, по которому преобразуется произведение $T_m^\lambda U_{m_1}^{\lambda_1}$, и используйте метод доказательства теоремы 2.

§ 2.1. Покажите, что обертывающая алгебра алгебры Гейзенберга $[P, Q] = I$ имеет тривиальный центр.

§ 3.1. Покажите, что центр обертывающей алгебры евклидовой алгебры Ли $T^n \ltimes so(n)$ порождается $\{n/2\}$ элементами.

§ 3.2. Найдите генераторы центра обертывающей алгебры полупрямого произведения $C^3 \ltimes SU(3)$.

§ 3.3. Покажите, что следующие операторы

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2,$$

$$C_2' = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{J} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$ и $\boldsymbol{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$, порождают центр обертывающей алгебры группы Лоренца.

§ 5.1. Является ли оператор спиральности $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ элементом обертывающего поля группы Пуанкаре?

§ 5.2. Разработайте расширение понятия обертывающего поля евклидовой алгебры Ли, которое содержало бы инвариантные операторы вида $|\boldsymbol{r}|$, $1/|\boldsymbol{r}|$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|$ и т. д.

§ 5.3. Пусть $g \to T_g$ — квазирегулярное представление группы SO (3) в пространстве $H = L^2(X)$, $X = SO(3)/SO(2)$. Покажите, что не существует псевдодифференциальных инвариантных операторов на $H$.

§ 5.4. Найдите генераторы центра обертывающего поля $D(L)$ для полупростых алгебр.

§ 5.5. Пусть $\Pi = T^4 \ltimes SO(3, 1)$, $N$ — множитель Ивасавы группы SO (3, 1) и $G_0 = T^4 \ltimes N$. Покажите, что в пространстве $H = L^2(X)$, $X = \Pi/G_0$, существует больше чем два инвариантных дифференциальных оператора группы $\Pi$.

§ 6.1. Найдите спектры операторов Казимира для неприводимых представлений исключительных алгебр Ли.

§ 6.2. Найдите производящую функцию (6.5) для спектров операторов Казимира исключительных алгебр Ли.