Глава 10

Точное построение конечномерных неприводимых представлений

Метод индуцированных представлений, описанный в гл. 8, дает решение задачи о классификации всех конечномерных неприводимых представлений для всех простых групп Ли. Однако, чтобы рассмотреть все следствия для физических приложений, нам необходимо явно определить:

1° Множество независимых инвариантных операторов.

2° Полный набор коммутирующих операторов (ПНКО), которые мы интерпретируем как физические наблюдаемые; природу и множество точек их спектров (гл. 13).

3° Свойства базисных функций и размерность пространства представления, отождествляемого с пространством физических состояний.

4° Свойства разложения представления группы G по отношению к ее подгруппе G_0.

5° Матричные элементы операторов T_g или $T(X)$ представления группы G или алгебры Ли L.

В этой главе мы рассмотрим четыре общих метода построения неприводимых представлений, для которых часть или все задачи 1°—5° решаются точно.

§ 1. Метод Гельфанда—Цетлина

Первым методом построения неприводимых представлений, который также дает решение перечисленных выше задач 1°—5°, является так называемый формализм Гельфанда—Цетлина. Он применим как к компактным, так и к некомпактным группам и представляется особенно удобным для приложений в квантовой физике. Мы дадим подробное описание этого формализма на примерах алгебр $u(n)$ и $\mathrm{so}(n)$.

А. *Представления* $u(n)$

Группа $U(n)$ определяется как группа преобразований в C^n, сохраняющих эрмитову форму

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Таким образом, для $u \in U(n)$ $u^*u = uu^* = 1$. Следовательно, генераторы однопараметрических подгрупп удовлетворяют условию эрмитовости [1])

$$M_{ik}^* = M_{ik}. \tag{2}$$

На совокупность из n^2 генераторов (2) натягивается алгебра Ли группы $U(n)$. Однако, как было отмечено в гл. 9, поскольку коммутационные соотношения для M_{ik} нельзя записать симметричным образом, мы исходим из алгебры Ли группы GL (n, R), элементы которой удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Алгебра Ли (3) имеет n^2-мерное представление, задаваемое матрицами Картана—Вейля

$$A_{ij} \to (e_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}. \tag{4}$$

Эти матрицы подчиняются условию

$$e_{ij}^* = e_{ji}. \tag{5}$$

Введем следующие n^2 операторов:

$$M_{kk} = A_{kk},$$

$$M_{kl} = A_{kl} + A_{lk}, \quad \tilde{M}_{kl} = \mathrm{i}(A_{kl} - A_{lk}), \quad k < l \leqslant n. \tag{6}$$

Когда $A_{ij} = e_{ij}$, операторы (6) являются $n \times n$-матрицами, удовлетворяющими условию эрмитовости (2). Значит, они являются генераторами $U(n)$, и для них автоматически выполняются коммутационные соотношения алгебры $u(n)$. Поэтому произвольное представление алгебры Ли группы GL (n, R), для которого справедливо условие (5), индуцирует эрмитово представление алгебры $u(n)$, определенное согласно (6). Ясно, однако, что этот факт не означает, что алгебры Ли групп $U(n)$ и GL (n, R) изоморфны, так как обе алгебры вещественны, а преобразование, задаваемое формулами (6), — это комплексная линейная подстановка.

Далее мы строим канонический базис в пространстве произвольного неприводимого представления алгебры $u(n)$. Построение основано на следующих двух свойствах неприводимых представлений $u(n)$:

1. Конечномерное неприводимое представление алгебры Ли $u(n)$ однозначно определяется n-мерным вектором $m_n = (m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn})$ с целочисленными компонентами m_{in}, подчиняющимися условию

$$m_{1n} \geqslant m_{2n} \geqslant \cdots \geqslant m_{nn}. \tag{7}$$

---

[1]) В гл. 9 мы использовали тензоры вида M_i^j или A_i^j. Это было удобным для вычисления инвариантов. В этом параграфе будем использовать ковариантные тензоры вида A_{ij}, A_{kl} и т. п.

Этот вектор представляет собой старший вес представления. Пространство, в котором реализуется неприводимое представление, определяемое вектором m_n, обозначаем через H^{m_n}. Будем предполагать, что алгебра Ли $u(n-1)$ вложена естественным образом в $u(n)$, т. е. она натягивается на генераторы A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ (раздел 8.3.Г).

2. В разложение неприводимых конечномерных представлений $u(n)$ входят лишь те неприводимые представления $u(n-1)$, для которых компоненты $m_{i,\,n-1}$ старшего веса m_{n-1} удовлетворяют условию

$$m_{in} \geqslant m_{i,\,n-1} \geqslant m_{i+1,\,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Кратность каждого неприводимого представления $u(n-1)$, входящего в разложение представления $u(n)$, равна единице (см. теорему 8.8.1).

Рассмотрим убывающую цепочку алгебр

$$u(n) \supset u(n-1) \supset \cdots \supset u(2) \supset u(1) \tag{9}$$

и разложим неприводимое пространство H^{m_n} на подпространства $H^{m_{n-1}}$, неприводимые по отношению к $u(n-1)$. Каждое из этих подпространств в свою очередь разлагается на подпространства, неприводимые относительно $u(n-2)$ и т. д. вплоть до $u(1)$. Так как неприводимые представления $u(1)$ одномерны, пересечение убывающей цепочки подпространств

$$H^{m_n} \supset H^{m_{n-1}} \supset \cdots \supset H^{m_2} \supset H^{m_1} \tag{10}$$

однозначно определяет это одномерное подпространство. Однозначность следует из свойства 2. Единичный вектор, на который натягивается это одномерное подпространство, обозначаем при помощи так называемой *схемы Гельфанда—Цетлина* m:

$$m = \begin{vmatrix} m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{n-1,\,n} & m_{nn} \\ m_{1,\,n-1} & m_{2,\,n-1} & \cdots & m_{n-1,\,n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & m_{12} \quad m_{22} & & \\ & & m_{11} & & \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Первая строка схемы определяется компонентами старшего веса неприводимого представления $u(n)$. Эта строка фиксирована для данного неприводимого представления $u(n)$. В последующих строках стоят произвольные числа, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$m_{ij} \geqslant m_{i,\,j-1} \geqslant m_{i+1,\,j}, \quad \begin{matrix} j = 2, 3, \ldots, n, \\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{matrix} \tag{12}$$

Эти неравенства отражены в схеме Гельфанда—Цетлина при помощи того факта, что числа $m_{i,\,j-1}$ в $(j-1)$-й строке расположены между числами m_{ij} и $m_{i+1,\,j}$ в j-й строке. Для определенного k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, числа m_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant k$, представляют собой компоненты старшего веса m_k неприводимого представления подалгебры $u(k)$, которое появится в разложении неприводимого представления $u(n)$.

Чтобы определить эрмитово представление алгебры Ли $u(n)$ соотношения (6), достаточно определить действие операторов A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, на схему m и проверить выполнение коммутационных соотношений (3) и равенств (5). Мы можем ограничиться генераторами A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$, поскольку действие остальных генераторов можно получить из коммутаторов этих генераторов; например, из (3) имеем

$$A_{k-2,\,k} = [A_{k-2,\,k-1},\ A_{k-1,\,k}],$$

а в общем случае

$$A_{k,\,k-h} = [A_{k,\,k-1},\ A_{k-1,\,k-h}],$$

$$A_{k-h,\,k} = [A_{k-h,\,k-1},\ A_{k-1,\,k}], \quad h > 1. \tag{13}$$

В случае алгебры Ли $u(2)$ действие генераторов A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$ хорошо известно (упражнение 8.9. 8.2). Руководствуясь этим случаем, определяем действие операторов A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$ для произвольной алгебры $u(n)$ следующим образом:

$$A_{kk}m = (r_k - r_{k-1})\,m, \tag{14}$$

$$A_{k,\,k-1}m = \sum_{j=1}^{k-1} a^j_{k-1}(m)\,m^j_{k-1}, \tag{15}$$

$$A_{k-1,\,k}m = \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\,\widehat{m^j_{k-1}}, \tag{16}$$

где

$$r_0 = 0, \quad r_k = \sum_{j=1}^{k} m_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

$$a^j_{k-1}(m) = \left[-\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (l_{ik} - l_{j,\,k-1} + 1) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (l_{i\,k-2} - l_{j,\,k-1})}{\prod\limits_{i \neq j} (l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} + 1)(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})} \right]^{1/2}, \tag{18}$$

$$b^j_{k-1}(m) = \left[-\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (l_{ik} - l_{j,\,k-1}) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (l_{i,\,k-2} - l_{j,\,k-1} - 1)}{\prod\limits_{i \neq j} (l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} - 1)} \right]^{1/2} \tag{19}$$

и

$$l_{ik} = m_{ik} - i.$$

Здесь m^j_{k-1} ($\hat{m}^j_{k-1}$) — схема, получаемая из m заменой числа $m_{j,k-1}$ в (k—1)-й строке схемы m на число $m_{j,k-1}-1$ ($m_{j,k-1}+1$). Заметим, что формально существуют схемы m^j_{k-1} и $\hat{m}^j_{k-1}$, для которых неравенства (12) не выполняются. Однако такие схемы в (15) или (16) не возникают, так как коэффициенты a^j_{k-1} (b^j_{k-1}) отличны от нуля только для схем, подчиняющихся неравенствам (12). Более того, для допустимых схем знаменатели в коэффициентах a^j_{k-1} и b^j_{k-1} не равны нулю, а подкоренные выражения неотрицательны. Поэтому

$$\bar{a}^j_{k-1}=a^j_{k-1} \quad \text{и} \quad \bar{b}^j_{k-1}=b^j_{k-1}. \tag{20}$$

Имеем также

$$a^j_{k-1}(m)=b^j_{k-1}(m^j_{k-1}), \quad b^j_{k-1}(m)=a^j_{k-1}\left(\hat{m}^j_{k-1}\right). \tag{21}$$

Все эти утверждения следуют непосредственно из соотношений (18), (19) и (12).

Следует заметить, что для некоторых недопустимых схем знаменатели в a^j_{k-1} или b^j_{k-1} могут обращаться в нуль. Однако в таких случаях числители также равны нулю, а такие отношения по определению равны нулю.

Покажем прежде всего, что операторы A_{kk} и $A_{k,k-1}$ удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям, т. е.

$$[A_{kk},\ A_{k,k-1}]=A_{k,k-1}, \quad k=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{22}$$

Действительно, из (15) и (14) следует

$$X\equiv A_{kk}A_{k,k-1}m=\sum_{j=1}^{k-1}a^j_{k-1}(m)\left[r_k\left(m^j_{k-1}\right)-r_{k-1}\left(m^j_{k-1}\right)\right]m^j_{k-1}.$$

Используя определение схемы m^j_k и (17), находим

$$X=\left[r_k(m)-r_{k-1}(m)\right]\sum_{j=1}^{k-1}a^j_{k-1}(m)\,m^j_{k-1}+\sum_{j=1}^{k-1}a^j_{k-1}(m)\,m^j_{k-1}=$$
$$=A_{k,k-1}A_{kk}m+A_{k,k-1}m,$$

так что

$$[A_{kk},\ A_{k,k-1}]\,m=A_{k,k-1}m, \tag{23}$$

что совпадает с (22) ввиду произвольности схемы m. Аналогично можно показать, что операторы A_{kk}, $A_{k-1,k}$, и $A_{k,k-1}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (3). Следовательно, в силу (13) операторы A_{ij}, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, удовлетворяют коммутационным

соотношениям (3). Затем проверяем условие эрмитовости (5), налагаемое на генераторы A_{ij}, что в свою очередь обеспечивает эрмитовость генераторов (6) алгебры $u(n)$; именно,

$$(n,\ A_{ij}m) = (n,\ A^*_{ji}m), \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{24}$$

для произвольных схем n и m.

Генераторы A_{kk}, $k = 1, 2, \ldots, n$, эрмитовы, поскольку в пространстве представления они диагональны, а их собственные значения вещественны в силу равенств (14)—(17). Для генераторов $A_{k,\,k-1}$ имеем

$$(n,\ A^*_{k,\,k-1}m) = \overline{(A^*_{k,\,k-1}m,\ n)} = \overline{(m,\ A_{k,\,k-1}n)} = \sum_{j=1}^{k-1} \overline{a^j_{k-1}}(n)\,\delta_{m,\ n^j_{k-1}}. \tag{25}$$

Поскольку $a^j_{k-1}(n)$ вещественны и удовлетворяют (21), мы получаем

$$\begin{aligned}(n,\ A^*_{k,\,k-1}m) &= \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(n^j_{k-1})\,\delta_{m,\ n^j_{k-1}} = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\,\delta_{n,\ \hat{m}^j_{k-1}} = (n,\ A_{k-1,\,k}m).\end{aligned} \tag{26}$$

Использованное здесь равенство

$$\delta_{m,\ n^j_{k-1}} = \delta_{n,\ \hat{m}^j_{k-1}}$$

следует из того факта, что n совпадает с m^j_{k-1} тогда и только тогда, когда m совпадает с $\hat{n}^j_{k-1}$.

Ввиду произвольности схем n и m в (25) и (26) имеем

$$A^*_{k,\,k-1} = A_{k-1,\,k}, \quad A^*_{k-1,\,k} = A_{k,\,k-1}. \tag{27}$$

Применяя метод индукции и используя рекуррентные формулы (13), получаем

$$\begin{aligned}A^*_{k,\,k-h} &= [A_{k,\,k-1},\ A_{k-1,\,k-h}]^* = [A^*_{k-1,\,k-h},\ A^*_{k,\,k-1}] = \\ &= [A_{k-h,\,k-1},\ A_{k-1,\,k}] = A_{k-h,\,k}.\end{aligned} \tag{28}$$

Поэтому условие эрмитовости (5) выполняется для произвольного A_{ij}, $i,\ j = 1, 2, \ldots, n$, в пространстве представления H^{m_n}. Следовательно, генераторы (6) алгебры $u(n)$ представляются в H^{m_n} эрмитовыми операторами.

Пространство H^{m_n}, в котором реализовано представление (14)—(19), по определению неприводимо. Независимое формальное

доказательство неприводимости следует из того факта, что схема

$$m = \begin{vmatrix} m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{n-2,\,n} & m_{n-1,\,n} & m_{nn} \\ & m_{2n} & m_{3n} & \cdots\cdots & m_{n-1,\,n} & m_{nn} & \\ & & m_{3n} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & m_{nn} & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & m_{n-1,\,n} & m_{nn} & & \\ & & & & m_{nn} & & \end{vmatrix}$$

является единственным инвариантным вектором подгруппы Z (т. е. $A_p^q m = 0$ для $p > q$), и из следствия 2 теоремы 8.2.2.

Пример 1. Наиболее простая схема Гельфанда—Цетлина получается в случае, когда все компоненты старшего веса равны между собой:

$$m_{1n} = m_{2n} = \cdots = m_{nn} = m. \tag{29}$$

В этом случае в силу неравенств (12) все остальные входящие в схему величины также равны m. Таким образом, получаем одномерное представление $U(n)$, которое имеет вид

$$U(n) \ni g \to T_g^{L^m} = (\det g)^m. \tag{30}$$

Пример 2. Схема Гельфанда—Цетлина для группы $U(3)$. (Последняя является важной группой высшей внутренней симметрии фундаментальных частиц; гл. 13.) Состояния, на которые натягивается пространство неприводимого представления группы $U(3)$, можно нумеровать при помощи собственных значений четырех коммутирующих операторов, именно I^2, I_3, связанных с подгруппой $SU(2)$, а также Y и B. Оказывается, схемы Гельфанда—Цетлина в точности соответствуют физическим состояниям, нумеруемым этими квантовыми числами. Выражая операторы I^2, I_3 и Y через операторы A_i^k подгруппы $U(2)$ и используя формулы (14), (15) и (16), получаем

$$m = \begin{vmatrix} m_{13} & & m_{23} & & m_{33} \\ & I + \frac{1}{2}Y + B & & -I + \frac{1}{2}Y + B & \\ & & I_3 + \frac{1}{2}Y + B & & \end{vmatrix},$$

где

$$m_{13} + m_{23} + m_{33} = 3B.$$

Величину B можно интерпретировать как барионное число. Мы видим, что для определенных I и Y существует $2I + 1$ схема

с различными I_3. Компоненты старшего веса алгебры u (3) также можно выразить через физические величины. Действительно, пусть Y_h — наивысшие возможные значения Y, а I_h — соответствующее (единственное) значение I; тогда из (8) имеем

$$m_{13} = B + \frac{1}{2} Y_h + I_h, \quad m_{23} = B + \frac{1}{2} Y_h - I_h, \quad m_{33} = B - Y_h. \tag{31}$$

Из неравенств (12) и формул (31) следует также, что неприводимые представления с одинаковыми Y_h и I_h, но различными значениями барионного числа B, имеют одинаковые размерности.

Теперь мы в состоянии дать решение задач, перечисленных в введении.

1. *Размерность* пространства H^{m_n} неприводимого представления находится по формуле Вейля [см. соотношение (8.8.30)]

$$N = \frac{\prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)}{\prod\limits_{i<j} (l_i^0 - l_j^0)}, \tag{32}$$

где

$$l_j = m_{jn} + n - j, \quad l_j^0 = n - j.$$

2. *Максимальный набор коммутирующих операторов* состоит из инвариантных операторов следующей цепочки подалгебр:

$$u(n) \supset u(n-1) \supset \cdots \supset u(2) \supset u(1), \tag{33}$$

т. е. он состоит из $(n^2 + n)/2$ операторов

$$\begin{array}{c} C_{1n},\ C_{2n},\ \ldots,\ C_{n-1,n},\ C_{nn} \\ C_{1,n-1},\ \ldots,\ C_{n-1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{12},\ C_{22} \\ C_{11} \end{array} \tag{34}$$

Здесь

$$C_{pk} = A^{i_1}_{i_2} A^{i_2}_{i_3} \ldots A^{i_{p-1}}_{i_p} A^{i_p}_{i_1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad p \leqslant k, \tag{35}$$

где A^j_i — генераторы gl (k, R), а суммирование по повторяющимся индексам производится от 1 до k.

3. *Собственные значения* любого из этих операторов были выражены явно через старшие веса в гл. 9, § 4. Например,

$$C_{1,k} = \sum_{i=1}^{k} m_{i,k} \quad C_{2,k} = \sum_{i=1}^{k} m_{i,k}(m_{i,k} + n + 1 - 2i) \text{ и т. д.} \tag{36}$$

4. *Матричные элементы генераторов* алгебры Ли $u(n)$ следуют из равенств (14)—(16) и (6). Например, матричные элементы генераторов $A_{k,\,k-1}$ равны

$$(m',\ A_{k,\,k-1}m) = \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-1}^{j}(m)\,\delta_{m_{k-1}^{j},\,m'}, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1. \tag{37}$$

Мы видим, что $A_{k,\,k-1}$ имеет неисчезающие матричные элементы только между соседними схемами m и m'. Пользуясь рекуррентными формулами (13), можно определить действие любого генератора A_{ik} на любую схему m. Точные формулы даны в гл. 11, § 8 [соотношения (15)—(24)] как для компактных, так и для некомпактных генераторов алгебры Ли $u(p, q)$.

5. Пусть $g \to \hat{T}_g$ — представление, сопряженное представлению $g \to T_g$ группы $U(n)$. Тогда в силу (5.1.14) 2° получаем для эрмитовых генераторов $\hat{M}_{ik}$

$$\hat{M}_{ik} = (-M_{ik})^T. \tag{38}$$

Таким образом, для $U(n)$, используя (6), мы видим, что представление сопряжено данному, если генераторы $A_{ik}(=M_{ik} - \mathrm{i}\tilde{M}_{ik})$ удовлетворяют условию (38). Воспользовавшись (37) и соотношениями (14) и (19), можно проверить, что неприводимые представления, задаваемые при помощи $\hat{m}_n = (\hat{m}_{1n},\ \hat{m}_{2n},\ \ldots,\ \hat{m}_{nn})$ и $m_n = (m_{1n},\ m_{2n},\ \ldots,\ m_{nn})$, взаимно сопряжены тогда и только тогда, когда

$$\hat{m}_{in} = -m_{n+1-i,\,n}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{39}$$

а представление m является самосопряженным, если

$$m_{in} = -m_{n+1-i,\,n}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

6. Совокупность всех представлений, задаваемых старшим весом $m_n = (m_{1n},\ m_{2n},\ \ldots,\ m_{nn})$, можно разбить на классы эквивалентности проективно эквивалентных представлений, получаемые следующим образом. С данным представлением, задаваемым старшим весом m_n, связываем подкласс всех неприводимых представлений, определяемых при помощи $\tilde{m}_n$, для которых компоненты $\tilde{m}_{in}$ старших весов удовлетворяют условию

$$\tilde{m}_{in} - m_{in} = s, \tag{40}$$

где s — любое целое число. На основе формулы Вейля (32) легко проверить, что представления, связанные с произвольным старшим весом $\tilde{m}_n$, удовлетворяющим условию (40), имеют ту же размерность, что и исходное представление, связанное с m_n. Кроме того,

на основе (14)—(16) проверяем, что матричные элементы любого генератора A_i^j связаны соотношением

$$(\tilde{m}', A_i^j \tilde{m}) = (m', A_i^j m) + s\delta_i^j \delta_{mm'}.$$

Поэтому глобальные представления $T^{L^{\tilde{m}}{}_n}$ и $T^{L^{m}{}_n}$ связаны друг с другом. Действительно, из (42) имеем

$$T^{L^{\tilde{m}}{}_n} = \exp is(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) T^{L^{m}{}_n} = (\det \delta)^s T^{L^{m}{}_n} =$$
$$= (\det g)^s T^{L^{m}{}_n},$$

где $\exp(\varphi_k) = \delta_k$ и $\det \delta = \det g$ (упражнение 3.11.6.3). Следовательно, представления $T^{L^{\tilde{m}}{}_n}$ и $T^{L^{m}{}_n}$ проективно эквивалентны, и совокупность неприводимых представлений $U(n)$ можно разбить на классы проективно эквивалентных представлений. Каждый подкласс проективно эквивалентных представлений содержит бесконечное множество неприводимых представлений, для старших весов которых выполняется условие (40). Любой подкласс проективно эквивалентных неприводимых представлений $U(n)$ становится одним неприводимым представлением группы $SU(n)$.

Б. *Представления алгебры* $o(n)$

Ортогональная группа $O(n)$ — это множество всех линейных преобразований g n-мерного евклидова пространства

$$x'_l = g_{ls} x_s, \quad s, l = 1, 2, \ldots, n,$$

сохраняющих квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Группа $O(n)$ содержит $\frac{1}{2} n(n-1)$ различных однопараметрических подгрупп, а именно вращений в плоскостях (x_i, x_k):

$$g_{ik}(\theta) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & & & & (i) & & & & (k) & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdots & 0 & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \cdots (i) \\ \\ \\ \\ \cdots (k) \\ \\ \\ \end{array}. \qquad (41)$$

В представлении $g \to T_g = g$ генератор X_{ik} однопараметрической подгруппы g_{ik} представляется кососимметрической $n \times n$-матрицей с элементами $(X_{ik})_{ik} = -(X_{ik})_{ki} = 1$ и нулями на остальных местах. Поэтому генераторы $O(n)$ можно выразить следующим образом через генераторы e_{ik} [соотношение (4)] группы GL (n, R):

$$X_{ik} = e_{ik} - e_{ki}. \tag{42}$$

Коммутационные соотношения для генераторов X_{ik} могут быть получены из коммутационных соотношений для e_{ik}:

$$[X_{ik}, X_{lm}] = \delta_{kl} X_{im} + \delta_{im} X_{kl} - \delta_{km} X_{il} - \delta_{il} X_{km}. \tag{43}$$

Как и в случае $u(n)$, построение неприводимых представлений $o(n)$ опирается на следующие два результата:

1. Конечномерное неприводимое представление алгебры Ли $o(n)$, $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$, однозначно определяется старшим весом $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ с целочисленными или полуцелочисленными компонентами, удовлетворяющими условию

1° для $n = 2\nu$: $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|$,

2° для $n = 2\nu + 1$: $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant m_\nu \geqslant 0$

(см. теорему 8.5.2).

2. В разложение неприводимого конечномерного представления $o(n)$ каждое неприводимое представление подалгебры $o(n-1)$ входит однократно, причем компоненты p_i старшего веса этих представлений подчиняются условиям

1° для $n = 2\nu$:

$$m_1 \geqslant p_1 \geqslant m_2 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant p_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|, \tag{44}$$

2° для $n = 2\nu + 1$:

$$m_1 \geqslant q_1 \geqslant m_2 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant m_\nu \geqslant q_\nu \geqslant -m_\nu$$

(см. теорему 8.8.2).

Построение неприводимых представлений алгебры Ли (43) будет проведено в два шага:

1. Построение множества ортонормированных состояний, связанных с данным старшим весом.

2. Определение действия генераторов X_{ik} на базисные состояния и проверка коммутационных соотношений (43).

Компоненты старшего веса обозначаем через

$$m = (m_{1,2k+1}, m_{2,2k+1}, \ldots, m_{k+1,2k+1}), \tag{45}$$

где n четное $(n = 2k + 2)$, и через

$$m = (m_{1,2k}, m_{2,2k}, \ldots, m_{k,2k}), \tag{46}$$

где n нечетное $(n = 2k + 1)$.

Заданному старшему весу сопоставляем схему Гельфанда—Цетлина m. Повторяя рассуждения, проведенные для $U(n)$, и используя соотношения (44), мы заключаем, что схемы имеют вид:

для четного n $(n = 2k + 2)$

$$m = \begin{vmatrix} m_{1,\,2k+1} & m_{2,\,2k+1} & \cdots & m_{k,\,2k+1} & m_{k+1,\,2k+1} \\ & m_{1,\,2k} & \cdots & m_{k,\,2k} & \\ & m_{1,\,2k-1} & \cdots & m_{k,\,2k-1} & \\ & & m_{1,\,2k-2} \cdots m_{k-1,\,2k-2} & & \\ & & m_{1,\,2k-3} \cdots m_{k-1,\,2k-3} & & \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ & & m_{14} \quad m_{24} & & \\ & & m_{13} \quad m_{23} & & \\ & & m_{12} & & \\ & & m_{11} & & \end{vmatrix}, \tag{47}$$

для нечетного n $(n = 2k + 1)$

$$m = \begin{vmatrix} m_{1,\,2k} & m_{2,\,2k} & \cdots & m_{k-1,\,2k} & m_{k,\,2k} \\ m_{1,\,2k-1} & m_{2,\,2k-1} & \cdots & m_{k-1,\,2k-1} & m_{k,\,2k-1} \\ & m_{1,\,2k-2} & & m_{k-1,\,2k-2} & \\ & m_{1,\,2k-3} & & m_{k-1,\,2k-3} & \\ & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & & m_{14} \quad m_{24} & & \\ & & m_{13} \quad m_{23} & & \\ & & m_{12} & & \\ & & m_{11} & & \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Схемы (47) или (48) определяются верхней строкой, которая содержит фиксированные компоненты старшего веса неприводимого представления. При $n = 2k + 2$ числа m_{ij} в других строках подчиняются неравенствам [см. соотношение (44)]

$$\begin{gathered} m_{1,\,2k+1} \geqslant m_{1,\,2k} \geqslant m_{2,\,2k+1} \geqslant m_{2,\,2k} \geqslant \cdots \geqslant m_{k,\,2k+1} \geqslant m_{k,\,2k} \geqslant |m_{k+1,\,2k+1}|, \\ m_{1,\,2k} \geqslant m_{1,\,2k-1} \geqslant m_{2,\,2k} \geqslant m_{2,\,2k-1} \geqslant \cdots \geqslant m_{k,\,2k-1} \geqslant -m_{k,\,2k}, \\ m_{1,\,2k-1} \geqslant m_{1,\,2k-2} \geqslant m_{2,\,2k-1} \geqslant \cdots \geqslant m_{k-1,\,2k-2} \geqslant |m_{k,\,2k-1}| \end{gathered} \tag{49}$$

и т. д.; для произвольной строки

$$\begin{aligned} &m_{i,\,2p+1} \geqslant m_{i,\,2p} \geqslant m_{i+1,\,2p+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1, \\ &m_{p,\,2p+1} \geqslant m_{p,\,2p} \geqslant |m_{p+1,\,2p+1}|, \\ &m_{i,\,2p} \geqslant m_{i,\,2p-1} \geqslant m_{i+1,\,2p}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1, \\ &m_{p,\,2p} \geqslant m_{p,\,2p-1} \geqslant -m_{p,\,2p}. \end{aligned}$$

Числа m_{ij} в j-й строке представляют собой компоненты старшего веса подалгебры $o(j+1)$. Связанные с данной схемой числа m_{ij} являются одновременно все целыми или все полуцелыми в отличие от старшего веса группы $U(n)$, где все m_{ij} были целыми.

При $n = 2k+1$ имеем

$$m_{1,2k} \geqslant m_{1,2k-1} \geqslant m_{2,2k} \geqslant m_{2,2k-1} \geqslant \cdots \geqslant m_{k,2k-1} \geqslant m_{k,2k},$$

$$m_{1,2k-1} \geqslant m_{1,2k-2} \geqslant m_{2,2k-1} \geqslant \cdots \geqslant m_{k-1,2k-2} \geqslant |m_{k,2k-1}| \text{ и т. д.}$$

Из коммутационных соотношений (43) следует, что действие всей алгебры можно воспроизвести, как только станет точно известно действие генераторов $X_{2p+1,2p}$, $p = 1, 2, \ldots, [(n-1)/2]$ и $X_{2p+2,2p+1}$, $p = 0, 1, 2, \ldots, [(n-2)/2]$. Теперь, при $n = 3$ и 4 действие этих генераторов нетрудно вычислить непосредственно; пользуясь этими выражениями, можно вывести формулы действия генераторов $X_{2p+1,2p}$ и $X_{2p+2,2p+1}$ для произвольного n. Поскольку эта процедура состоит в прямых алгебраических вычислениях, мы ограничимся тем, что приведем лишь конечные формулы (полный вывод см. в [653]).

Пусть m_k^j ($\widehat{m}_k^j$) — схема, получаемая из m заменой m_{jk} на $m_{jk}-1$ ($m_{jk}+1$). Тогда операторы $X_{2p+1,2p}$ и $X_{2p+2,2p+1}$ определяются следующими соотношениями:

$$X_{2p+1,2p}m = \sum_{j=1}^{p} A(m_{j,2p-1})\,\widehat{m}_{2p-1}^{j} - \sum_{j=1}^{p} A(m_{j,2p-1}-1)\,m_{2p-1}^{j},$$

$$p = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \tag{50а}$$

и

$$X_{2p+2,2p+1}m = \sum_{j=1}^{p} B(m_{j,2p})\,\widehat{m}_{2p}^{j} - \sum_{j=1}^{p} B(m_{j,2p}-1)\,m_{2p}^{j} + \mathrm{i}C_{2p}m. \tag{50б}$$

Используя обозначения

$$\begin{gathered} m_{p,2p-1} = l_{p,2p-1}, \quad m_{p,2p}+1 = l_{p,2p}, \\ m_{p-1,2p-1}+1 = l_{p-1,2p-1}, \quad m_{p-1,2p}+2 = l_{p-1,2p}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{1,2p-1}+p-1 = l_{1,2p-1}, \quad m_{1,2p}+p = l_{1,2p}, \end{gathered} \tag{51}$$

определяем коэффициенты A, B и C следующими формулами:

$$A(m_{j,\,2p-1}) = \frac{1}{2}\left[\prod_{r=1}^{p-1}(l_{r,\,2p-2} - l_{j,\,2p-1} - 1)(l_{r,\,2p-2} + l_{j,\,2p-1})\right]^{1/2} \times$$

$$\times\left[\prod_{r=1}^{p}(l_{r,\,2p} - l_{j,\,2p-1} - 1)(l_{r,\,2p} + l_{j,\,2p-1})\right]^{1/2} \times$$

$$\times\left\{\prod_{r\neq j}(l^2_{r,\,2p-1} - l^2_{j,\,2p-1})\left[l^2_{r,\,2p-1} - (l_{j,\,2p-1}+1)^2\right]\right\}^{-1/2}, \tag{52}$$

$$B(m_{j,\,2p}) = \left[\frac{\prod\limits_{r=1}^{p}(l^2_{r,\,2p-1} - l^2_{j,\,2p})\prod\limits_{r=1}^{p+1}(l^2_{r,\,2p+1} - l^2_{j,\,2p})}{l^2_{j,\,2p}(4l^2_{j,\,2p}-1)\prod\limits_{r\neq j}(l^2_{r,\,2p} - l^2_{j,\,2p})\left[(l_{r,\,2p}-1)^2 - l^2_{j,\,2p}\right]}\right]^{1/2},$$

$$C_{2p} = \frac{\prod\limits_{r=1}^{p} l_{r,\,2p-1}\prod\limits_{r=1}^{p+1} l_{r,\,2p+1}}{\prod\limits_{r=1}^{p} l_{r,\,2p}(l_{r,\,2p}-1)}.$$

Из коммутационных соотношений (43) и выражений (50) для $X_{2p+1,\,2p}$ и $X_{2p+2,\,2p+1}$ мы можем затем получить явный вид любого генератора X_{ik} алгебры Ли $o(n)$. Непосредственными вычислениями, как и в случае $u(n)$, можно проверить, что коммутационные соотношения для генераторов X_{ik} выполняются. Кроме того, если предположить ортонормированность схем Гельфанда—Цетлина, ассоциированных с данным весом m, то генераторы X_{ij} удовлетворяют условию эрмитовости

$$X_{ij} = -X_{ji}. \tag{53}$$

Пример 1. Неприводимые представления алгебры Ли $o(4)$. Схема Гельфанда—Цетлина в этом случае имеет вид

$$m = \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} \\ m_{12} & \\ m_{11} & \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M & \end{vmatrix}, \tag{54}$$

где числа m_{13} и m_{23} являются фиксированными компонентами старшего веса. Из коммутационных соотношений (43) следует, что для

определения действия любого генератора достаточно задать действие X_{21}, X_{32} и X_{43}. Из (50) получаем

$$X_{21}m = \mathrm{i}Mm,$$

$$X_{43}\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M & \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{(J+M+1)(J-M+1)(m_1-J)(J-m_2+1)(J+m_2+1)(m_1+J+2)}{(2J+1)(2J+3)(J+1)^2}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J+1 & \\ M & \end{vmatrix} + \mathrm{i}M\,\frac{(m_1+1)\,m_2}{J(J+1)}\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M & \end{vmatrix} -$$

$$- \left[\frac{(J+M)(J-M)(m_1-J+1)(m_1+J+1)(J-m_2)(J+m_2)}{(2J+1)(2J-1)J^2}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J-1 & \\ M & \end{vmatrix},$$

$$X_{32}\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M & \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(J-M)(J+M+1)]^{1/2}\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M+1 & \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2}[(J-M+1)(J+M)]^{1/2}\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ J & \\ M-1 & \end{vmatrix},$$

где, согласно (49),

$$m_1 \geqslant J \geqslant |m_2|, \quad J \geqslant M \geqslant -J,$$

а m_1, m_2, J и M являются одновременно все целыми или все полуцелыми.

Пространство H^m представления (50) алгебры $o(n)$ натягивается на базисные векторы (47) или (48) и является, по определению, неприводимым. Можно опять, как и в случае $u(n)$, дать независимое формальное доказательство, используя метод Z-инвариантов.

Размерность неприводимого представления, определяемого компонентами старшего веса, находится по формуле Вейля (8.8.29).

Максимальный набор коммутирующих операторов в простран-

стве представления содержит следующие операторы:

1) $O(2k+2)$:

$$\begin{array}{cccc}
C_2(2k+2) & C_4(2k+2) & \cdots & C_{2k}(2k+2) \quad C'_k(2k+2) \\
C_2(2k+1) & C_4(2k+1) & \cdots C_{2(k-1)}(2k+1) & C_{2k}(2k+1) \\
C_2(2k) & C_4(2k) & C_{2(k-1)}(2k) & C'_k(2k) \\
 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & C_2(4) & C'_2(4) & \\
 & C_2(3) & & \\
 & X_{21} & &
\end{array} \tag{55}$$

2) $O(2k+1)$:

$$\begin{array}{cccc}
C_2(2+1) & C_4(2k+1) & \cdots C_{2(k-1)}(2k+1) & C_{2k}(2k+1) \\
C_2(2k) & C_4(2k) & \cdots C_{2(k-1)}(2k) & C'_k(2k) \\
C_2(2k-1) & & \cdots & C_{2k-1}(2k-1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & C_2(4) & C'_2(4) & \\
 & C_2(3) & & \\
 & X_{21} & &
\end{array} \tag{56}$$

Здесь

$$C_{2i}(p) = \mathrm{Tr}\, X^{2i}(p) \tag{57}$$

и

$$C'_l(2l) = \varepsilon^{i_1 j_1, i_2 j_2, \ldots, i_l j_l} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_2} \cdots X_{i_l j_l}, \tag{58}$$

где $X^{2i}(p)$ означает $2i$-ю степень матрицы $X(p) \equiv (X_{ik}(p))$, составленной из генераторов $X_{ik}(p)$ группы $O(p)$, а $\varepsilon^{i_1 j_1, i_2 j_2, \ldots, i_l j_l}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты (см. гл. 9, § 4, Б). Следует отметить, что для группы $O(2k)$, в противоположность группе $O(2k+1)$, совокупность операторов Казимира (57) не обеспечивает набора независимых инвариантных операторов, и поэтому необходимо включить псевдоскалярный оператор (58). Спектры операторов (57) и (58) были даны в гл. 9, § 4, Б.

В общем случае, если компоненты старшего веса алгебры $o(n)$, кроме (44), не ограничиваются другими соотношениями, то в пространстве представления, натянутом на схемы Гельфанда—Цетлина, мы имеем

$$N = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} + \left\{\frac{n-1}{2}\right\}\right] \tag{59}$$

независимых коммутирующих операторов, где $\frac{1}{2}n(n-1)$ и

$\left\{\frac{n-1}{2}\right\}$ — размерность и ранг группы $O(n)$ соответственно. Однако если компоненты старшего веса не являются независимыми, то некоторые из операторов (57) или (58) становятся функциями других и количество независимых коммутирующих операторов уменьшается. Например, если старший вес имеет вид

$$m(f,\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{60}$$

то ввиду строения схем (47) и соотношения (56) всего $n-1$ коммутирующих операторов

$$C_2(n),\ C_2(n-1),\ \ldots,\ C_2(3),\ X_{21} \tag{61}$$

порождают кольцо коммутирующих операторов в пространстве неприводимого представления алгебры $o(n)$, задаваемого старшим весом (60).

Заметим, наконец, что поскольку любой старший вес (44) со всеми целочисленными или всеми полуцелочисленными компонентами порождает, в подходе Гельфанда—Цетлина, неприводимое представление, этот формализм дает описание всех неприводимых конечномерных представлений алгебры $o(n)$.

§ 2. Тензорный метод

Многие физические законы, такие как уравнения Максвелла или Эйнштейна, наиболее компактно выражаются на языке тензоров — объектов, преобразующихся по конечномерным тензорным представлениям группы G физической симметрии.

В этом разделе мы устанавливаем связь между теорией тензорных представлений и теорией индуцированных представлений. В частности, мы даем классификацию всех неприводимых тензорных представлений групп $GL(n, C)$ и $SO(n, C)$. Ясно, что, используя теорему 8.3.1, мы получаем описание всех неприводимых тензорных представлений также для вещественных компактных и некомпактных форм этих групп, например $U(p, q)$ и $SO(p, q)$, $p+q=n$.

Тензорный метод не решает непосредственно практические задачи 1°—5°, указанные в введении. Однако он дает красивую связь между теорией представлений группы G и теорией представлений группы перестановок S_n. Эту связь нельзя увидеть при помощи других методов.

А. *Тензоры*

Пусть группа G реализована как матричная группа, т. е. $G \ni g \leftrightarrow \{g_i^k = D_i^k\}\ D_i^k,\quad i, k = 1, 2, \ldots, N$. Величина $T = \{T_{i_1 i_2, \ldots, i_r}\},\ \{T_{i_1 i_2, \ldots, i_r} \in C,\ i_k = 1, 2, \ldots, N,\ k = 1, 2, \ldots$